Université Claude Bernard-Lyon I
DEUG Sciences et Technologies

Mathématiques Informatique et Applications aux Sciences

MIAS UE 12 : Mathématiques

COURS et EXERCICES

– 2001 –

Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 Définitions et opérations

1.1.1 L'ensemble des nombres complexes

Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation algébrique $x^2+1=0$. On a introduit l'ensemble des nombres complexes (au XIX^e siècle même si à la fin du XVIII^e siècle ils sont déjà utilisés couramment) pour donner des solutions à cette équation. En fait, les nombres complexes sont les solutions de toutes les équations algébriques de degré $n \in \mathbb{N}$ à coefficients réels (et même à coefficients complexes).

Soit i, appelé *l'unité imaginaire*, ayant la propriété $i^2 = -1$. On peut considérer un nombre complexe comme étant de la forme $a + ib$, où a et b sont des réels. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
Si $z = a + ib$, alors a est appelée la partie réelle de z (notée $\mathrm{Re}(z)$) et b est appelée la partie imaginaire de z (notée $\mathrm{Im}(z)$).
Deux nombres complexes $a + ib$ et $c + id$ (où a, b, c, d sont des réels) sont égaux si et seulement si $a = c$ et $b = d$. On peut considérer l'ensemble des nombres réels comme le sous-ensemble des nombres complexes pour lequel $b = 0$. De plus si $a = 0$, le nombre complexe $0 + ib$ ou ib est appelé imaginaire pur.
Le nombre complexe *conjugué* d'un nombre complexe $a + ib$ est $a - ib$. Le nombre complexe conjugué de z est noté $\overline{z}$.

Proposition 1.1.1 *Soient z, z_1 et z_2 des nombres complexes. On a :*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2},\ \ \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \ \ et\ \ \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

De plus,

$$\begin{array}{l} z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \overline{z} \\ et \\ z \text{ est imaginaire pur } \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = -\overline{z}\,. \end{array}$$

1.1.2 Opérations fondamentales sur les nombres complexes

Pour effectuer des opérations avec les nombres complexes, on procède de la même manière qu'avec les nombres réels en remplaçant i^2 par -1.

1. Addition

$$(a+ib)+(c+id) = a+ib+c+id = (a+c)+i(b+d).$$

2. Soustraction

$$(a+ib)-(c+id) = a+ib-c-id = (a-c)+i(b-d).$$

3. Multiplication

$$(a+ib)(c+id) = ac+ibc+iad+i^2bd = (ac-bd)+i(bc+ad).$$

4. Division

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

1.1.3 Module d'un nombre complexe

Le module (ou la valeur absolue) d'un nombre complexe $a+ib$ est défini par :

$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Si z, z_1 et z_2 sont des nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

1. $|z| \geq 0$ et $|z|^2 = z\overline{z}$.
2. Si $z \in \mathbb{R}$, $|z|$ est la valeur absolue du réel z.
3. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$.
6. $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.
7. $|z_1+z_2| \geq |z_1|-|z_2|$ ou $|z_1+z_2| \geq |z_2|-|z_1|$.
8. Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

1.2 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition 1.2.1 *Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, on représente le nombre complexe $z = a + ib$ par le point M de coordonnées (a, b). On dit que z est l'affixe complexe du point M.*
Soient $\rho = \|\vec{OM}\|$ (la norme euclidienne du vecteur $\vec{OM}$) et $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ mod 2π (θ n'est pas défini si $z = 0$). Le nombre θ est appelé l'argument de z et est noté $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. Il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On a alors :

$$\mathrm{Re}(z) = \rho\cos\theta\,,\ \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\theta, \quad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \textit{et} \quad |z| = \rho\,.$$

Notation : On pose

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Proposition 1.2.2 *Si $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$, on a :*

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}, \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tan\theta = \frac{b}{a}\ (\textit{si } a \neq 0).$$

Théorème 1.2.3 *Soient $z = \rho e^{i\theta}, z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$. On a alors :*

1. $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
2. $z^n = \rho^n e^{in\theta}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$.
3. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$ *si* $z \neq 0$.

Corollaire 1.2.4 (Formule de Moivre) *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

autrement dit,

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

En particulier, $e^{2in\pi} = 1$ et $e^{i\pi} = -1$.

1.3 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 1.3.1 *Soit n un entier strictement positif. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est :*

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \textit{ tel que } z^n = 1\}.$$

Théorème 1.3.2 *L'ensemble $\mathbb{U}_n$ a exactement n éléments qui sont les affixes complexes des sommets du polygone à n cotés, de centre O d'affixe 0, dont un des sommets est le point d'affixe 1.*
En d'autres termes,

$$\mathbb{U}_n = \{\omega_k := e^{2ik\frac{\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Remarque 1.3.3 *Si ω_k désigne une des racines n-ièmes de l'unité, $\omega_k = e^{2ik\frac{\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\overline{\omega_k} = \frac{1}{\omega_k} = \omega_{-k}\,.$$

1.4 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 1.4.1 *Soient n un entier strictement positif et z un nombre complexe. On appelle racine n-ièmes de z tout nombre complexe z' tel que ${z'}^n = z$.*

<u>Problème :</u> étant donné un nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ($r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), on veut déterminer toutes (si possible) ses racines n-ièmes.
<u>Méthode :</u> on cherche z' sous la forme $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.
En utilisant la propriété 2. du théorème 1.2.3, on a

$$\begin{aligned} {z'}^n = z &\Longleftrightarrow {r'}^n e^{in\theta'} = re^{i\theta} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} {r'}^n = r \\ \text{et} \\ n\theta' = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \text{et} \\ \theta' = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Tous les nombres obtenus ont même module (à savoir $\sqrt[n]{r}$). Ils seront distincts si leurs arguments ne sont pas congrus modulo 2π. Par conséquent, pour les obtenir tous, il est nécessaire et suffisant de donner à k, n valeurs entières consécutives, par exemple $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. On a donc le théorème suivant

Théorème 1.4.2 *Tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, non nul, possède n racines n-ièmes qui sont*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1\,.$$

On a donc $|z_k| = |z_{k-1}|$ et $\operatorname{Arg}(z_k) - \operatorname{Arg}(z_{k-1}) = \dfrac{2\pi}{n}$ modulo 2π. On passe donc de l'image de z_{k-1} à celle de z_k par une rotation de centre 0 et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$. Pour $n > 2$, les images des n racines n-ièmes d'un nombre complexe z non nul sont donc les sommets

d'un polygône régulier centré en 0, à n cotés.
Revenons sur le cas particulier des racines carrés ($n = 2$) **:**
si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ses deux racines carrés sont

$$z_0 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_1 = \sqrt{r}\left(\cos(\frac{\theta}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\theta}{2} + \pi)\right).$$

Par conséquent, on a toujours $z_1 = -z_0$.

1.5 Fondements axiomatiques de la théorie des nombres complexes (Hamilton, 1835)

D'un point de vue logique, il est souhaitable de définir un nombre complexe comme un couple ordonné (a, b) de nombres réels a et b vérifiant certaines conditions opérationnelles équivalant à celles vues précédemment. Ces définitions sont les suivantes (toutes les lettres représentent des nombres réels) :

1. **Egalité** : $(a, b) = (c, d)$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.
2. **Somme** : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
3. **Produit** : $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

En d'autres termes, l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est défini comme étant $\mathbb{R}^2$ muni d'une addition et d'une multiplication qui en font un corps. De ces définitions, on déduit :

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1),$$

et on peut lui associer $a + ib$ où i est le symbole représentant $(0, 1)$ et ayant la propriété $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ (qui peut être considéré comme équivalent au réel -1) et $(1, 0)$ peut être considéré comme équivalent au réel 1. Le couple $(0, 0)$ correspond au nombre réel 0.

1.6 Exercices

Exercice 1.1 *Soit* $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$. *Calculer* $f(1-i)$ *et* $f(1+i)$.

Exercice 1.2 *Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe*

$$z = \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)},\ m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.3 *Déterminer l'ensemble des nombres complexes* z *tels que le complexe* $Z = z^2+2z-3$ *soit réel.*

Exercice 1.4 *Déterminer le module et un argument de* $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ *et* $z_2 = 1-i$ *puis le module et un argument de* $\dfrac{z_1}{z_2}$. *En déduire la valeur de* $\cos(\frac{\pi}{12})$ *et de* $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 1.5 *Soit* α *un nombre réel tel que* $0 \leqslant \alpha < \pi$. *Déterminer le module et un argument du nombre complexe* $z = 1+\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$, *en fonction de* α.

Exercice 1.6 *Soit* $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. *On pose* $\alpha = z+z^4$ *et* $\beta = z^2+z^3$.

a) *Montrer que* $1+\alpha+\beta = 0$. *En déduire que* α *et* β *sont solutions de l'équation* $X^2+X-1=0$.

b) *Déterminer* α *en fonction de* $\cos\frac{2\pi}{5}$.

c) *Résoudre l'équation* $X^2+X-1=0$ *et en déduire la valeur de* $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 1.7 *Soient* u, v, w *3 nombres complexes tels que* $|u|=|v|=|w|=1$. *Etablir la relation*

$$|uv+vw+wu| = |u+v+w|.$$

Exercice 1.8 *Linéariser les polynômes trigonométriques suivants :*

$$\text{a)}\quad \cos^5\theta \quad \textit{et} \quad \text{b)}\quad \cos^4\theta\sin^2\theta.$$

Exercice 1.9 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Calculer*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos k\theta \quad \textit{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n}\sin k\theta.$$

Exercice 1.10 *Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :*

$$\text{a)}\quad Z_1 = 7+24i, \qquad \text{b)}\quad Z_2 = 9+40i \quad \textit{et} \quad \text{c)}\quad Z_3 = 1+i.$$

Exercice 1.11 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

$$\text{a)}\quad z^2 = -2\sqrt{3}+2i, \qquad \text{b)}\quad z^2 = 3-4i.$$

Exercice 1.12 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

a) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$, b) $2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i = 0$,
c) $z^2 - (3+4i)z + 7i - 1 = 0$, d) $z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0$ *et*
e) $z^2 - 2\overline{z} = 0$.

Exercice 1.13 *Soit $a = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z = \dfrac{1+a}{1-a}$.*

Exercice 1.14 *Calculer le module et l'argument de $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.*

Exercice 1.15 *Soit $z = \dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4.*

Exercice 1.16 *Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$. Montrer que $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.*

Exercice 1.17 *Résoudre de deux façons différentes l'équation*

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 1.18 *Pour lequel des entiers n suivants $1986, 1987, 1988, 1989$ le nombre*

$$(1+i)^n$$

est-t-il imaginaire pur ?

Exercice 1.19 *Résoudre $(z-i)^n = (z+i)^n, n \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre de solutions ?*

Exercice 1.20 *Calculer*

$$\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right)^n$$

en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.21 *Soit φ un réel tel que $0 \le \varphi \le \pi$. On pose $p = e^{i\varphi}$ et on considère l'équation*

$$z^2 - 2pz + 1 = 0. \tag{1.1}$$

a) *Soient* z_1 *et* z_2 *les solutions de (1.1). Quel est le lien entre* $|z_1|$ *et* $|z_2|$ *et quel est le lien entre* $\text{Arg}(z_1)$ *et* $\text{Arg}(z_2)$ *?*

b) *Pour quelles valeurs de* φ *les solutions* z_1 *et* z_2 *sont-elles réelles ?*

c) *Pour quelles valeurs de* φ *les solutions* z_1 *et* z_2 *sont-elles imaginaires pures?*

Exercice 1.22 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & z^5 - z = 0, & \text{b)} & (1+i\sqrt{3})z^4 - 1 + i = 0, \\ \text{c)} & 27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \quad et & \text{d)} & z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0. \end{array}$$

Exercice 1.23 *Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :*

$$x^3 + (1-3i)x^2 - (6-i)x + 10i = 0.$$

Exercice 1.24 a) *Déterminer les racines cubiques de* 1.

b) *On note* $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. *Montrer que* $1 + j + j^2 = 0$.

c) *Exprimer toutes les racines cubiques de* 1 *en fonction de* j.

Exercice 1.25 a) *Déterminer les quatre nombres complexes* a, b, c, d *différents de* 1 *solutions dans* $\mathbb{C}$ *de l'équation* $z^5 = 1$.

b) *Montrer pour tout nombre complexe* z *l'égalité :*

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d).$$

Exercice 1.26 *Exprimer* $\cos(4x)$ *et* $\sin(4x)$ *en fonction de* $\cos x$ *et* $\sin x$.

Exercice 1.27 *Déterminer l'ensemble des nombres complexes* z *tels que :*

a) $|(1-i)z - 3i| = 3$.

b) $|1 - z| \leq 1/2$.

c) $\text{Re}(1 - z) \leq 1/2$.

d) $\text{Re}(iz) \leq 1/2$.

e) $|1 - 1/z|^2 = 2$.

f) z^7 *et* $1/z^2$ *soient conjugués.*

Déterminer l'ensemble des points M *d'affixe* z *tels que :*

g) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$.

h) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2.$

i) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1.$

j) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \sqrt{2}.$

k) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| \leq \sqrt{2}.$

Exercice 1.28 *Montrer que, dans le plan complexe, l'ensemble* $\left\{\frac{1}{1+it}, t \in \mathbb{R}\right\}$ *est contenu dans le cercle de centre* $(1/2, 0)$ *et de rayon* $1/2$. *Est-ce le cercle tout entier ?*

Exercice 1.29 *Soit* $\theta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta \leq \pi$.

a) *Déterminer l'ensemble des nombres complexes* z *solutions de l'équation*

$$z^6 - 2z^3 \cos\theta + 1 = 0. \tag{1.2}$$

b) *Déterminer* θ *pour que les points du plan dont les affixes sont les solutions de l'équation (1.2) soient des sommets d'un hexagone régulier.*

Exercice 1.30 *Soient* a, b, c, d *quatre nombres complexes liés par les relations*

$$a + c = b + d \text{ et } a + ib = c + id.$$

On appelle A, B, C, D *les points d'affixe* a, b, c, d *respectivement. Montrer que le quadrilatère* $ABCD$ *est un carré.*

Exercice 1.31 *Soient* u *et* v *deux nombres complexes. Etablir la relation (Identité du parallélogramme)*

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

et donner une interprétation géométrique du résultat.

1.7 Test de 30 mn (SMUE11, Automne 2000)

Exercice 1 *Trouver les racines dans* $\mathbb{C}$ *de* $x^2 + 2x + 2$.

Exercice 2 *Déterminer les racines cubiques de* $1 + i$.

Exercice 3 *Déterminer l'ensemble des points* M *d'affixe* z *tels que :*

$$|iz - 5| < 4.$$

Chapitre 2

Fonctions circulaires et fonctions circulaires réciproques

2.1 Fonctions circulaires : formulaire

2.1.1 Formules élémentaires

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\ \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}.$$

2.1.2 Formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.
\end{aligned}$$

2.1.3 Formules de duplication

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \\
\sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\
\tan 2a &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.
\end{aligned}$$

Conséquences :
1) Linéarisation de $\cos^2 a$ et de $\sin^2 a$:

$$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a,\ 1 - \cos 2a = 2\sin^2 a,\ \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2},\ \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

2) Expression de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

2.1.4 Formules de linéarisation

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\
\cos a \sin b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))
\end{aligned}$$

2.1.5 Formules de factorisation

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}
\end{aligned}$$

2.1.6 Formules relatives aux angles associés

1. Angles opposés :

$$\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x,\ \tan(-x) = -\tan x.$$

2. Angles supplémentaires :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x,\ \sin(\pi - x) = \sin x,\ \tan(\pi - x) = -\tan x.$$

3. Angles complémentaires :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}.$$

4. Angles “de différence π” :

$$\cos(x + \pi) = -\cos x,\ \sin(x + \pi) = -\sin x,\ \tan(x + \pi) = \tan x.$$

2.1.7 Quelques valeurs particulières

$$\begin{array}{lll}
\cos(0) = 1, & \sin(0) = 0, & \tan(0) = 0 \\
\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2, & \sin(\pi/6) = 1/2, & \tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3 \\
\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2, & \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2, & \tan(\pi/4) = 1 \\
\cos(\pi/3) = 1/2, & \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2, & \tan(\pi/3) = \sqrt{3} \\
\cos(\pi) = -1, & \sin(\pi) = 0, & \tan(\pi) = 0.
\end{array}$$

D'autres valeurs se déduisent de ce tableau en utilisant les formules des angles associés.

2.2 Fonctions circulaires réciproques

Définition 2.2.1 *On appelle fonctions circulaires réciproques les quatre fonctions suivantes :*

1. *Fonction "Arc sinus", fonction réciproque de la fonction "sinus" sur l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{array}{rcl} \arcsin\ : [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}$$

Elle est impaire, continue, dérivable sur $]-1,1[$ *et strictement croissante, de dérivée*

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. *Fonction "Arc cosinus", fonction réciproque de la fonction "cosinus" sur l'intervalle* $[0, \pi]$.

$$\begin{array}{rcl} \arccos\ : [-1,1] & \to & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x \end{array}$$

Elle est continue, dérivable sur $]-1,1[$ *et strictement décroissante, de dérivée*

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. *Fonction "Arc tangente", fonction réciproque de la fonction "tangente" sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{array}{rcl} \arctan\ :\ ]-\infty, \infty[& \to &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \arctan x \end{array}$$

Elle est impaire, continue, dérivable et strictement croissante, de dérivée

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. *Fonction "Arc cotangente", fonction réciproque de la fonction "cotangente" sur l'intervalle* $]0, \pi[$.

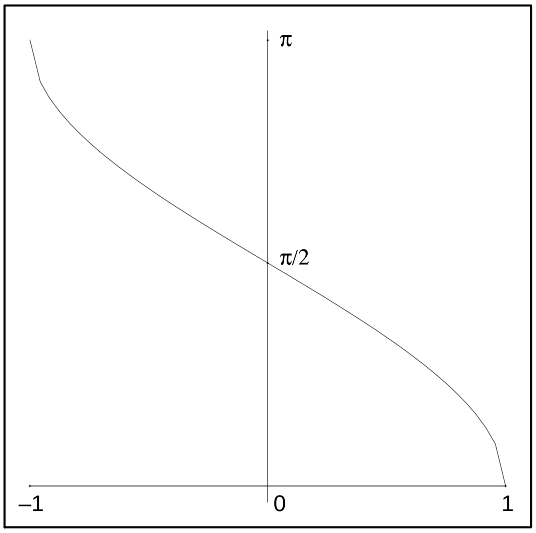
$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arccotan} \ : \ ]-\infty, \infty[& \rightarrow &]0, \pi[\\ x & \longmapsto & \operatorname{arccotan} x \end{array}$$

Elle est continue, dérivable et strictement décroissante, de dérivée

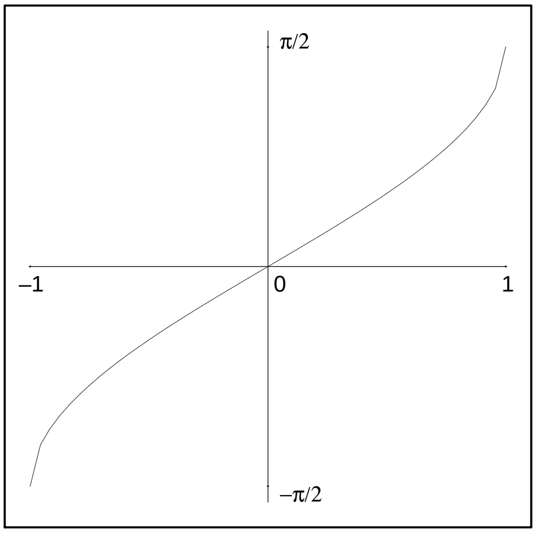
$$(\operatorname{arccotan})'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Voici le graphe des fonctions réciproques circulaires ainsi que les limites aux bornes des intervalles de définition.

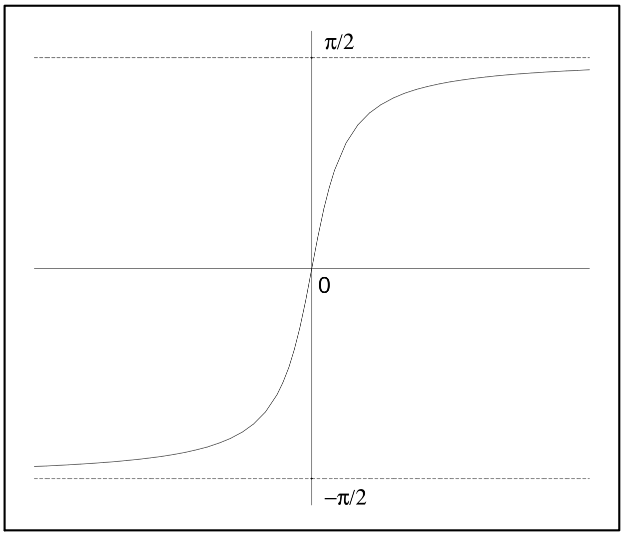
$x \mapsto \arccos(x)$



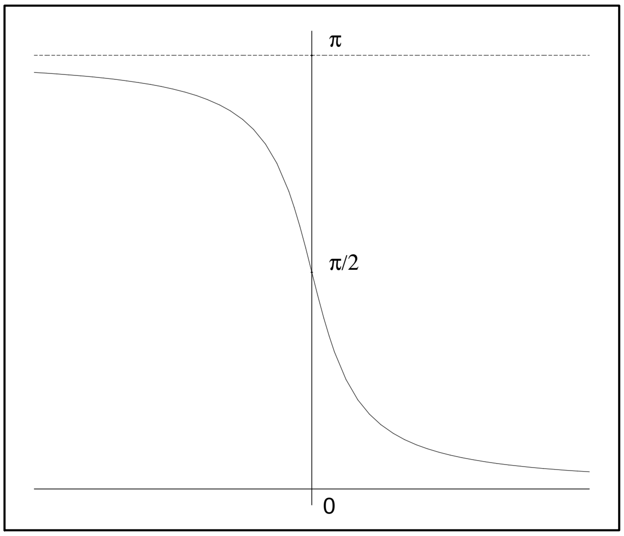
$x \mapsto \arcsin(x)$



$x \mapsto \arctan(x)$



$x \mapsto \operatorname{arccotan}(x)$



Compléments pour le calcul des $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$ de réels

2.3 Comment calculer $\arccos x$ et $\arcsin x$?

Tout d'abord rappelons que $\arccos x$ et $\arcsin x$ ne sont définies que si $x \in [-1, 1]$. De plus, si $x \in [-1, 1]$ est fixé, $\arccos x$ et $\arcsin x$ sont uniques.

Si $x \in [-1, 1]$ est donné, comment calculer $\arccos x$?

On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\arccos x = \theta \Longleftrightarrow \theta \in [0, \pi] \text{ et } \cos\theta = x}$$

Exemple : on veut déterminer $\arccos\frac{1}{2}$. On écrit alors $\arccos\frac{1}{2} = \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Ainsi (à l'aide du cercle trigonométrique) on trouve que $\theta = \frac{\pi}{3}$; en effet $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ et bien sur $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Si $x \in [-1, 1]$ est donné, comment calculer $\arcsin x$?

On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\arcsin x = \theta \Longleftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin\theta = x}$$

Exemple : on veut déterminer $\arcsin\frac{1}{2}$. On écrit alors $\arcsin\frac{1}{2} = \theta$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Ainsi (à l'aide du cercle trigonométrique) on trouve que $\theta = \frac{\pi}{6}$; en effet $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et bien sur $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

2.4 Comment calculer $\arctan x$?

Tout d'abord rappelons que $\arctan x$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, $\arctan x$ est unique.
On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\arctan x = \theta \Longleftrightarrow \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \tan\theta = x}$$

Exemple : on veut déterminer $\arctan 1$. On écrit alors $\arctan 1 = \theta$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\theta = 1$. Ainsi (à l'aide du cercle trigonométrique) on trouve que $\theta = \frac{\pi}{4}$; en effet $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et bien sur $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

2.5 Comment calculer $\cos(\arccos x)$, $\sin(\arcsin x)$ et $\tan(\arctan x)$?

Tout d'abord rappelons que $\cos(\arccos x)$ et $\sin(\arcsin x)$ n'ont de sens que si $x \in [-1,1]$. Par contre $\tan(\arctan x)$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \cos(\arccos x) & = & x & \text{pour tout } x \in [-1,1] \\ \sin(\arcsin x) & = & x & \text{pour tout } x \in [-1,1] \\ \tan(\arctan x) & = & x & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{array}$$

2.6 Comment calculer $\arccos(\cos x)$, $\arcsin(\sin x)$ et $\arctan(\tan x)$?

Tout d'abord remarquons que $\arccos(\cos x)$ et $\arcsin(\sin x)$ ont un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\arctan(\tan x)$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Attention, en général, $\arccos(\cos x) \neq x$, $\arcsin(\sin x) \neq x$ et $\arctan(\tan x) \neq x$.

On a l'équivalence suivante : si $x \in \mathbb{R}$ est fixé , alors

$$\boxed{\arccos(\cos x) = \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in [0,\pi] \text{ et } \cos x = \cos\alpha}$$

Ainsi $\arccos(\cos x) = x \Longleftrightarrow x \in [0,\pi]$.

Exemple : on veut déterminer $\arccos(\cos(9\pi/4))$. On écrit alors $\arccos(\cos(9\pi/4)) = \alpha$ avec $\alpha \in [0,\pi]$ et $\cos\alpha = \cos(9\pi/4)$. Comme $\cos(9\pi/4) = \cos(\pi/4)$, on obtient alors $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

On a l'équivalence suivante : si $x \in \mathbb{R}$ est fixé , alors

$$\boxed{\arcsin(\sin x) = \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin x = \sin\alpha}$$

Ainsi $\arcsin(\sin x) = x \Longleftrightarrow x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exemple : on veut déterminer $\arcsin(\sin(9\pi/4))$. On écrit alors $\arcsin(\sin(9\pi/4)) = \alpha$ avec $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\sin\alpha = \sin(9\pi/4)$. Comme $\sin(9\pi/4) = \sin(\pi/4)$, on obtient alors $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

On a aussi l'équivalence suivante : si $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ est fixé , alors

$$\boxed{\arctan(\tan x) = \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \tan x = \tan\alpha}$$

Ainsi $\arctan(\tan x) = x \Longleftrightarrow x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exemple : on veut déterminer $\arctan(\tan(9\pi/4))$. On écrit alors $\arctan(\tan(9\pi/4)) =$

α avec $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan\alpha = \tan(9\pi/4)$. Comme $\tan(9\pi/4) = \tan(\pi/4)$, on obtient alors $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

2.7 Comment calculer $\arccos(\sin x)$ et $\arcsin(\cos x)$?

Tout d'abord remarquons que $\arccos(\sin x)$ et $\arcsin(\cos x)$ sont définis pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \arccos(\sin x) = \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in [0, \pi] \text{ et } \cos\alpha = \sin x \\[2ex] \arcsin(\cos x) = \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ et } \sin\alpha = \cos x \end{array}}$$

Exemple :

1. On veut déterminer $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$. On écrit alors $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = \alpha$ avec $\alpha \in [0, \pi]$ et $\sin\dfrac{\pi}{3} = \cos\alpha$. On trouve ainsi $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.
2. On veut déterminer $\arcsin\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$. On écrit alors $\arcsin\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right) = \alpha$ avec $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\cos\dfrac{2\pi}{3} = \sin\alpha$. Comme $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, on trouve ainsi $\alpha = -\dfrac{\pi}{6}$.

2.8 Exercices

Fonctions circulaires

Exercice 2.1 *A partir de la formule de Moivre, retrouver les formules d'addition des fonctions circulaires suivantes :*

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b.\end{aligned}$$

En déduire les formules d'addition pour la fonction $\tan$, *à savoir :*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \ \ et \ \ \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}.$$

Exercice 2.2 *A l'aide des formules de duplication, vérifier que, pour* $t = \tan\frac{x}{2}$, *on a :*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 2.3 *Exprimer* $\cos(4x)$ *et* $\sin(4x)$ *en fonction de* $\cos x$ *et* $\sin x$.

Exercice 2.4 *Résoudre l'équation :* $\cos 4x = \sin 7x$.

Exercice 2.5 *Résoudre l'équation :* $\cos^2 x = 1/4$.

Exercice 2.6 (*) *Résoudre les équations suivantes :*

a) $\sin 2x = \cos^2 x$, b) $\cos 2x + 2\sin x\cos x = 0$ *et* c) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 5x$.

Exercice 2.7 *Exprimer en fonction de* $\tan x$ *seulement :*

a) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$, b) $\dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$, c)(*) $\cos^2 x - \sin x\cos x$.

Exercice 2.8 *Soient* a, b *deux réels. Montrer qu'il existe deux constantes* A *et* α *telles que :*

$$a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\alpha) \quad quelque\ soit\ x \in \mathbb{R}.$$

En déduire la résolution de l'équation :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Fonctions circulaires réciproques

Exercice 2.9 *Préciser le domaine de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$\text{a)}\quad f(x) = \arctan\frac{1}{x}, \qquad \text{b)}\quad g(x) = \frac{\arcsin x}{x},$$
$$\text{c)}\quad h(x) = \arccos\sqrt{x} \quad \textit{et} \quad \text{d)}\quad k(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x.$$

Exercice 2.10 *Sachant que* $\arcsin(\sin x) = x$ *pour* $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, et en utilisant la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions, démontrer que pour* $x \in]-1, 1[$ *:*

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De façon analogue, démontrer que pour $x \in]-1, 1[$ *:*

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et que pour $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 2.11 *Trouver une expression simple pour* $\arccos(\cos x)$ *quand* $x \in [\pi; 2\pi]$. *Même question avec* $\arcsin(\sin x)$ *et* $x \in [-3\pi/2; -\pi/2]$.

Exercice 2.12 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \arcsin(\sin x).$$

Etudier les propriétés de f *et tracer son graphe.*

Exercice 2.13 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \arcsin(\sin 3x).$$

Etudier les propriétés de f *et tracer son graphe.*

Exercice 2.14 $^{(*)}$ *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \arccos(\cos x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x)) + \frac{1}{6}\arccos(\cos(3x)).$$

Etudier les propriétés de f *et tracer son graphe.*

Exercice 2.15 (*) *Soit* $f : \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$ *l'application définie par :*

$$f(x) = \arctan(x-1) + \arctan(x+1) - \arctan\frac{2x}{2-x^2}.$$

Etudier les propriétés de f *et tracer son graphe.*

Exercice 2.16 *Trouver le domaine de définition, puis étudier les variations des fonctions suivantes :*

$$\text{a)}\quad f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}, \qquad \text{b)}\quad g(x) = \arctan\frac{2x}{1-x^2},$$
$$\text{c)}\quad h(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2} - 2\arctan x \quad \textit{et} \quad \text{d)}\quad k(x) = \arccos\frac{x}{2-x}.$$

Exercice 2.17 *Calculer*

$$\text{a)}\quad \arcsin(1/2), \qquad \text{b)}\quad \arctan(-1/\sqrt{3}), \qquad \text{c)}\quad \arcsin(\sin(2\pi/3)),$$
$$\text{d)}\quad \arctan(\tan(9\pi/4)), \qquad \text{e)}\quad \arcsin(\sin(-9\pi/4)) \quad \textit{et} \quad \text{f)}\quad \tan(\arctan 3).$$

Exercice 2.18 *Les équations suivantes ont elles des solutions ? Si elles existent, les déterminer.*

$$\text{a)}\quad \arcsin x = \frac{2\pi}{3}, \qquad \text{b)}\quad \arctan x = \frac{2\pi}{3}, \qquad \text{c)}\quad \arcsin x + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4},$$
$$\text{d)}\quad \arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \quad \textit{et} \quad \text{e)}\quad \arccos x + \arctan\frac{1}{2} = \pi.$$

Exercice 2.19 *Démontrer que :*

$$\text{a)}\quad \textit{pour tout } x \in [-1,1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$
$$\text{b)}\quad \textit{si } x > 0, \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$
$$\text{c)}\quad \textit{si } x < 0, \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

2.9 Test de 30 mn (SMUE11, Automne 2000)

Exercice 1 *Calculer :*

1. $\arccos\left(\frac{-1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
3. $\arctan\left(\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 2 *Indiquer sur quel intervalle les fonctions suivantes sont dérivables puis calculer leur dérivées :*

1. $f : x \longmapsto \tan(x^2)$.
2. $g : x \longmapsto \arccos(2x^2 - 1)$.
3. $h : x \longmapsto \arcsin(\cos 3x)$.

Chapitre 3

Fonctions exponentielle, logarithmique et hyperboliques

3.1 Fonctions exponentielle et logarithme

Définition 3.1.1 *Il n'existe qu'une seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, à dérivée continue, telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout x et $f(0) = 1$. Cette fonction est notée $x \longmapsto e^x$ ("exponentielle" de x) et vérifie :*

$$e^{x+y} = e^x e^y, \text{ pour tout } x \text{ et tout } y \in \mathbb{R}.$$

En outre, cette fonction est strictement croissante et a pour image l'intervalle $]0, +\infty[$.

Définition 3.1.2 *La fonction réciproque de la fonction exponentielle est la fonction "logarithme" (ou logarithme népérien) ; elle est notée $x \longmapsto \ln x$; elle est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Sa dérivée en x vaut $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$. Enfin elle vérifie :*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \text{ pour tout } x \text{ et tout } y \in]0, +\infty[.$$

Proposition 3.1.3 *Les fonctions logarithme et exponentielle vérifient :*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Les égalités de 4. sont simplement les affirmations que les dérivées des fonctions $x \longmapsto \ln(1 + x)$ et $x \longmapsto e^x$ en 0 sont égales à 1.

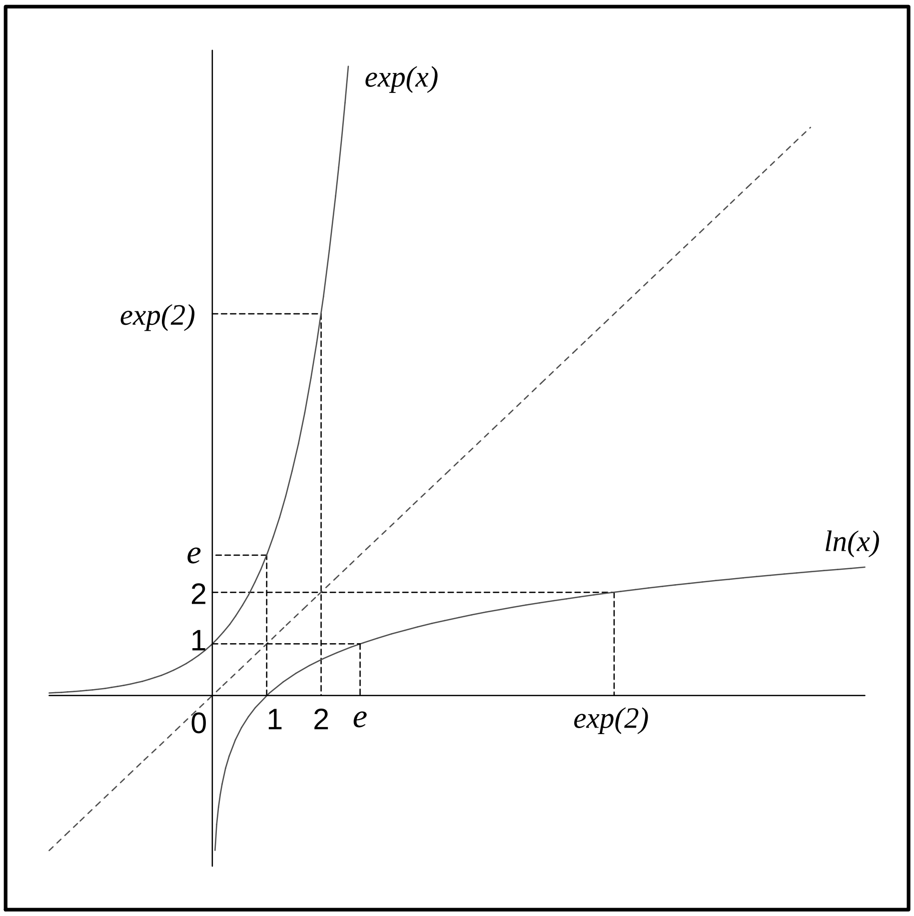
Rappel de propriétés algébriques fondamentales du logarithme et de l'exponentielle

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \text{ pour tout } a, b > 0 \text{ et } \ln(a^q) = q\ln(a) \text{ pour tout } a > 0 \text{ et } q \in \mathbb{Q}.$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \text{ pour tout } a \text{ réel et } (e^a)^q = e^{qa} \text{ pour tout } a \text{ réel et } q \in \mathbb{Q}.$$

Graphes des fonctions exponentielle et logarithme

les fonctions $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto \ln(x)$



3.2 Fonctions exponentielles

Proposition 3.2.1 *Soit $a > 0$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$a^x = e^{x\ln(a)}.$$

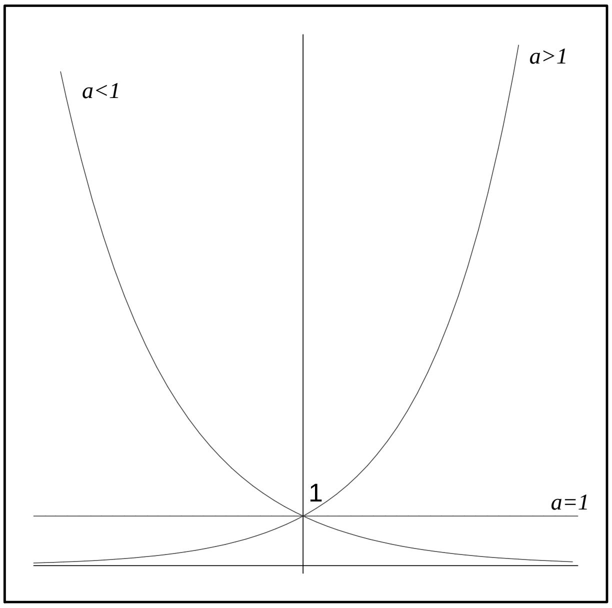
La fonction $x \longmapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable et vérifie :

1. $\ln(a^x) = x\ln(a)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. $a^x a^y = a^{x+y}$ *pout tout* $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $(ab)^x = a^x b^x$ *pour* $a, b > 0$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
4. $(a^x)^y = a^{xy}$ *pout tout* $x, y \in \mathbb{R}$.
5. $(ab)^x = a^x b^x$ *pour* $a, b > 0$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
6. $(a^x)' = a^x \ln(a)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
7. $x \longmapsto a^x$ *est strictement croissante (resp. décroissante) si* $a > 1$ *(resp. si* $a < 1$*).*
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Preuve : $x \longmapsto a^x$ est la fonction composée des deux fonctions $x \longmapsto x\ln(a)$ et $y \longmapsto e^y$. Cette remarque donne la continuité, la dérivabilité, les égalités 5. et 6. Les autres égalités découlent de la propriété $\ln e^x = x$ et se démontrent en prenant les logarithmes de chaque membre. Pour l'égalité 8. on utilise le 4. de la Proposition 3.1.3.

Graphes des fonctions exponentielles

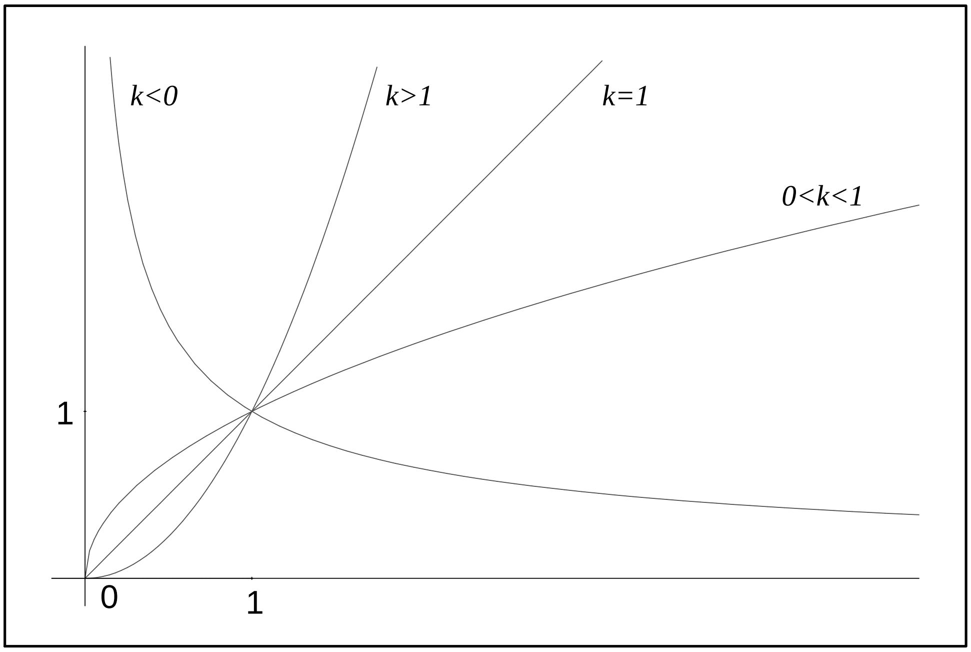
$x \mapsto a^x$ avec $a > 0$



Définition 3.2.2 *Pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction puissance k-ième est la fonction $x \longmapsto x^k = e^{k\ln(x)}$. Elle est continue, dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée kx^{k-1} en x. Enfin elle est strictement croissante (resp. décroissante) si $k > 0$ (resp. si $k < 0$).*

Graphes des fonctions puissances

$x \mapsto x^k$ pour $x > 0$



3.3 Fonctions logarithmiques

Proposition 3.3.1 *Soit $a > 0$, $a \neq 1$. On pose, pour $x \in]0, +\infty[$,*

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

En fait la fonction $x \longmapsto \log_a(x)$ est la fonction réciproque de $x \longmapsto a^x$. La fonction $x \longmapsto \log_a(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$, continue et dérivable et vérifie :

1. $\log_e(x) = \ln(x)$ *pour tout* $x > 0$.

2. $\log_a(a) = 1$.

3. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ *pout tout* $x, y > 0$.

4. $\log_a(x^q) = q\log_a(x)$ *pout tout* $q \in \mathbb{Q}$ *et pour tout* $x > 0$.

5. $\log_a(b)\log_b(a) = 1$ *pour* $a, b > 0$.

6. $(\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ *pour* $x > 0$.

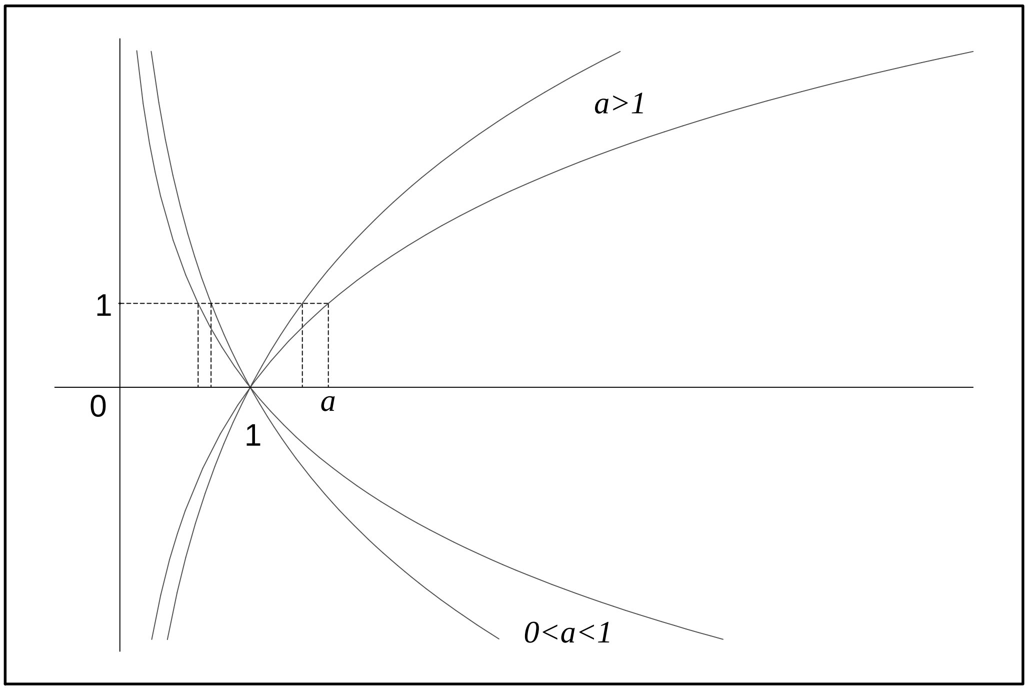
7. $x \longmapsto \log_a(x)$ *est strictement croissante (resp. décroissante) si* $a > 1$ *(resp. si* $0 < a < 1$*).*

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$ *si* $a > 1$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$ *si* $0 < a < 1$.

9. $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ *si* $a > 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$ *si* $0 < a < 1$.

Graphes des fonctions logarithmiques

$x \mapsto \log_a(x)$ avec $0 < a$, $a \neq 1$



3.4 Comparaison de la croissance des fonctions a^x, x^k et $\log_a(x)$

Pour $a > 1$ et $k > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{\log_a x} = +\infty.$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} &= 0. \\
\lim_{x\to 0} x \ln x &= 0. \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} &= +\infty \text{ pour tout } k > 0. \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{(\log_a x)^n} &= +\infty \text{ pour tout } k, n > 0.
\end{aligned}$$

3.5 Fonctions hyperboliques

Définition 3.5.1 *Les quatre fonctions hyperboliques sont définies comme suit :*

1. *"cosinus hyperbolique" :* $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. *"sinus hyperbolique" :* $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
3. *"tangente hyperbolique" :* $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
4. *"cotangente hyperbolique" :* $\operatorname{coth} x = \dfrac{1}{\operatorname{th} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Proposition 3.5.2 *A l'instar des fonctions circulaires ordinaires, les fonctions hyperboliques sont définies sur* $\mathbb{R}$ *(sauf* coth *qui est définie sur* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$*), continues et dérivables, et satisfont les propriétés suivantes :*

1. *La fonction* $x \longmapsto \operatorname{ch} x$ *est paire et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$.
2. *La fonction* $x \longmapsto \operatorname{sh} x$ *est impaire et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
3. *La fonction* $x \longmapsto \operatorname{th} x$ *est impaire et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
4. *La fonction* $x \longmapsto \operatorname{coth} x$ *est impaire et strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$.

On a le formulaire suivant (cf. Travaux Dirigés) :

Relations fondamentales

1. $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$ et $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}$, ce qui donne :
2. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
3. $(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$ pour tout entier positif n.
4. $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

Formules d'addition

1. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{ch}(x)$.
2. $\mathrm{sh}(x-y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{ch}(x)$.
3. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{sh}(x)$.
4. $\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{sh}(x)$.
5. $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x)+\mathrm{th}(y)}{1+\mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$.
6. $\mathrm{th}(x-y) = \dfrac{\mathrm{th}(x)-\mathrm{th}(y)}{1-\mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$.

Formules de duplication

1. $\mathrm{th}(2x) = \dfrac{2\,\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}$.
2. $\mathrm{sh}^2(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}$, $\mathrm{ch}^2(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}$, $\mathrm{th}^2(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x)-1}{\mathrm{ch}(2x)+1}$.
3. $\mathrm{ch}(2x) = \dfrac{1+\mathrm{th}^2(x)}{1-\mathrm{th}^2(x)}$, $\mathrm{sh}(2x) = \dfrac{2\,\mathrm{th}(x)}{1-\mathrm{th}^2(x)}$.

Dérivées

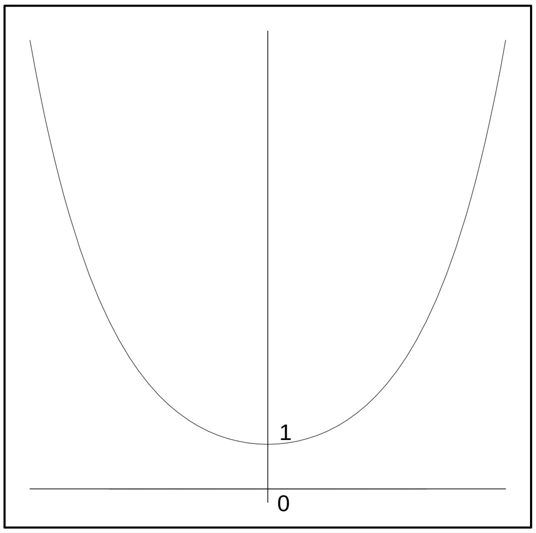
1. $(\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}(x)$, $(\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
2. $(\mathrm{th})'(x) = 1-\mathrm{th}^2(x)$, $(\mathrm{coth})'(x) = 1-\mathrm{coth}^2(x)$.

Limites aux bornes des intervalles de définitions

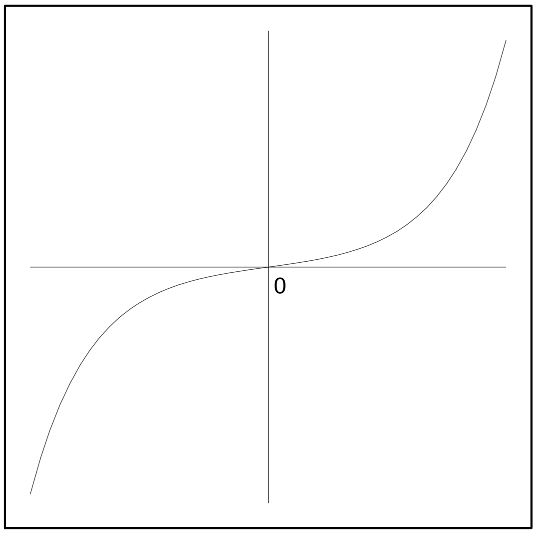
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{coth}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{coth}(x) = -1$.
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{coth}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{coth}(x) = -\infty$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$.

Graphes des fonctions hyperboliques

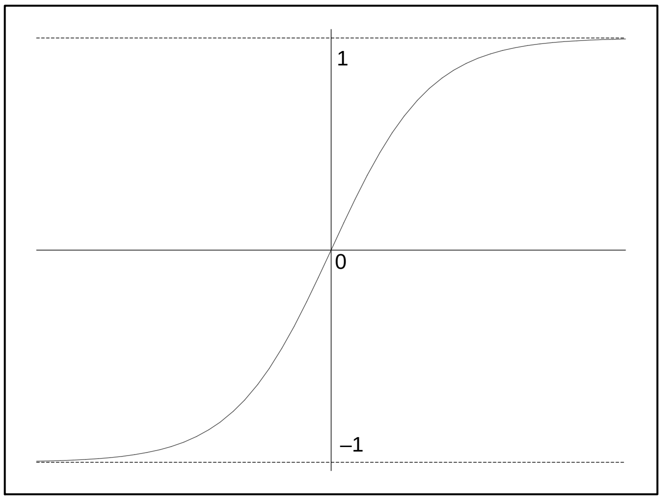
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$



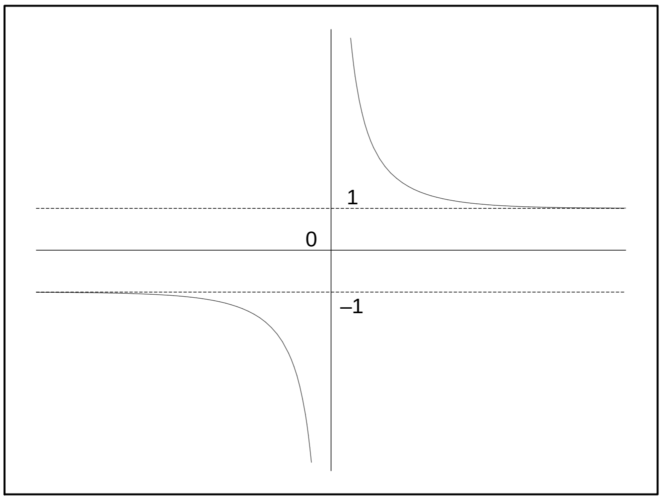
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$



$x \mapsto \mathrm{th}(x)$



$x \mapsto \coth(x)$



3.6 Fonctions hyperboliques réciproques

Définition 3.6.1 *On appelle fonctions hyperboliques réciproques les quatres fonctions suivantes :*

1. *Fonction "argument cosinus hyperbolique", fonction réciproque de la fonction "cosinus hyperbolique" sur l'intervalle* $[0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{argch}: & [1, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{argch}\, x \end{array}$$

Elle est continue, dérivable sur $]1, +\infty[$ *et strictement croissante, de dérivée*

$$(\mathrm{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

2. *Fonction "argument sinus hyperbolique", fonction réciproque de la fonction "sinus hyperbolique" sur* $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{argsh}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{argsh}\, x \end{array}$$

Elle est impaire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ *et strictement croissante, de dérivée*

$$(\mathrm{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3. *Fonction "argument tangente hyperbolique", fonction réciproque de la fonction "tangente hyperbolique" sur* $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{argth}: &]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{argth}\, x \end{array}$$

Elle est impaire, continue, dérivable et strictement croissante sur $]-1, 1[$ *de dérivée*

$$(\mathrm{argth})'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

4. *Fonction "argument cotangente hyperbolique", fonction réciproque de la fonction "cotangente hyperbolique" sur* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

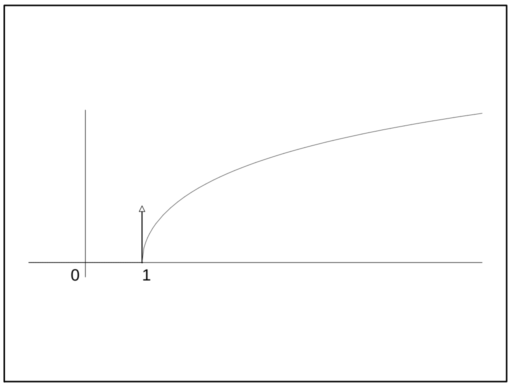
$$\begin{array}{rccl} \mathrm{argcoth}: &]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{argcoth}\, x \end{array}$$

Elle est continue, dérivable et strictement décroissante sur son intervalle de définition, de dérivée

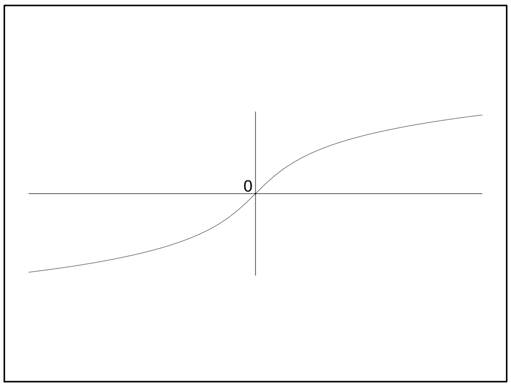
$$(\mathrm{argcoth})'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Graphe des fonctions hyperboliques réciproques

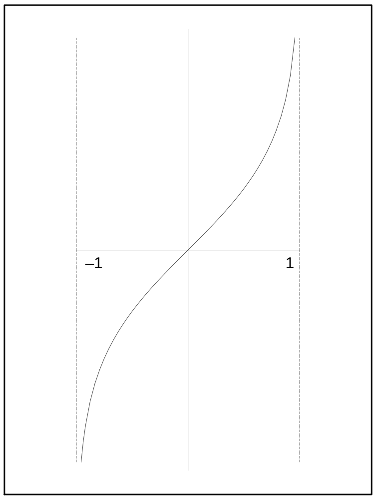
$x \mapsto \operatorname{argch}(x)$



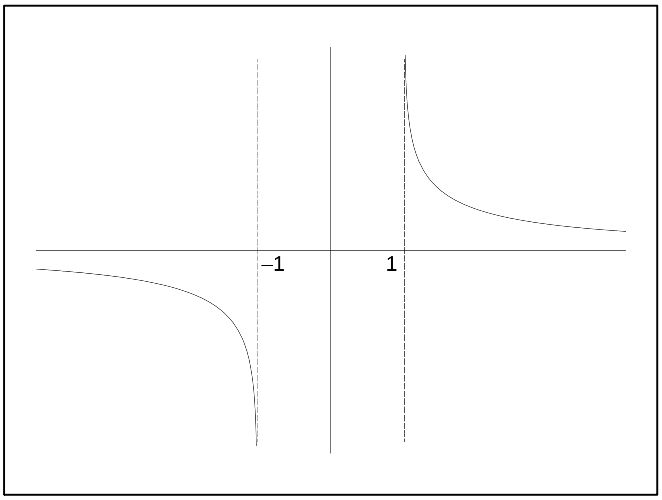
$x \mapsto \operatorname{argsh}(x)$



$x \mapsto \operatorname{argth}(x)$



$x \mapsto \operatorname{argcoth}(x)$



Liens entres les fonctions hyperboliques réciproques et la fonction logarithme

On a les relations suivantes (voir exercice 3.22)

1. $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, pour $x \geqslant 1$.
2. $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln(\frac{1+x}{1-x})$, pour $x \in]-1, 1[$.
4. $\operatorname{argcoth} x = \frac{1}{2} \ln(\frac{1+x}{x-1})$, pour $x < -1$ ou $x > 1$.

3.7 Exercices

Fonctions exponentielles et logarithmes

Exercice 3.1 *Rechercher dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation :*

$$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3).$$

Exercice 3.2 *Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :*

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$$

Exercice 3.3 *Déterminer la limite de :*

$$\text{a)} \quad \ln x - x, \qquad \text{b)} \quad \ln^2 x - \sqrt{x}, \qquad \text{c)} \quad \frac{\ln(x+1)}{\ln x},$$

pour $x \to +\infty$.

Exercice 3.4 *Déterminer la limite, pour $x \to 0$ avec $x > 0$, de la fonction*

$$f(x) = \sqrt{x}\ln^3 x.$$

Exercice 3.5 *Calculer*

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to+\infty}(e^x - x), \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}, \quad \textit{et} \quad \text{c)} \quad \lim_{x\to 0} x^2 e^{1/x}.$$

Exercice 3.6 *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$\text{a)} \quad f(x) = x\ln x, \qquad \text{b)} \quad f(x) = \ln|\ln x|,$$
$$\text{c)} \quad f(x) = \ln|\tan(x/2)| \quad \textit{et} \quad \text{d)} \quad f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Exercice 3.7 *Soient x et y deux réels distincts. Montrer que l'on a :*

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}.$$

$^{(*)}$ *Interpréter cette inégalité sur le graphe de la fonction $x \to e^x$.*

Exercice 3.8 *Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction $f(x) = x - \ln x$.*

Exercice 3.9 *Etudier les fonctions :*

$$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x} \quad \textit{et} \quad g(x) = x - 1 - \ln x.$$

En déduire que, si $x > 1$, on a :

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1.$$

Exercice 3.10 *Etudier les fonctions :*

$$f(x) = \ln(1+x) - x, \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad \textit{et} \quad h(x) = x - 1 - \ln x.$$

En déduire que, si $x > 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

Exercice 3.11 *Etudier le sens de variation de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - 1 - x$. En déduire que l'on a :*

$$1 + x < e^x \quad \textit{pour tout } x \textit{ réel.}$$

Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

Exercice 3.12 *Montrer que pour tout entier positif n et pour tout réel x :*

$$(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx).$$

Exercice 3.13 *Vérifier les formules d'addition suivantes des fonctions hyperboliques*

a) $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a)$, b) $\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a)$,

c) $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{sh}(a)$, d) $\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)\operatorname{sh}(a)$,

e) $\operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$ *et* f) $\operatorname{th}(a-b) = \dfrac{\operatorname{th}(a) - \operatorname{th}(b)}{1 - \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}$.

Exercice 3.14 *Montrer que l'on a, pour x et y réels :*

a) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x-y}{2}$, b) $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2\operatorname{sh}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{sh}\dfrac{x-y}{2}$.

Exercice 3.15 a) *Calculer* $\operatorname{ch}\big(\frac{1}{2}\ln(3)\big)$ *et* $\operatorname{sh}\big(\frac{1}{2}\ln(3)\big)$.

b) *A l'aide de la formule d'addition $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{sh}(a)$ et de la question précédente, déterminer les solutions réelles de l'équation :*

$$2\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \sqrt{3}\operatorname{ch}(5x).$$

Exercice 3.16 *Résoudre les équations :*

$$\text{a)}\quad 2\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x = 1, \qquad \text{b)}\quad \operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x = 1, \quad \textit{et} \quad \text{c)}\quad 3\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x = 4.$$

Exercice 3.17 *Résoudre le système :*

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 3 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \end{cases}$$

Exercice 3.18 *Calculer :*

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to+\infty} \ln(\operatorname{ch} x) - x, \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to+\infty} e^{1-\operatorname{th} x} \quad \textit{et} \quad \text{c)}\quad \lim_{x\to 0} (1+\operatorname{th} x)^{1/\operatorname{sh} x}.$$

Exercice 3.19 *Trouver les limites, quand $x \to 0$, des fonctions suivantes :*

$$\text{a)}\quad f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{x}, \qquad \text{b)}\quad g(x) = \frac{1-\operatorname{ch} x}{x^2} \qquad \text{c)}\quad h(x) = \frac{\operatorname{th} x}{x}.$$

Exercice 3.20 *Etudier les variations et tracer le graphe des fonctions suivantes :*

$$\text{a)}\quad f(x) = \operatorname{th}\frac{1}{x}. \qquad \text{b)}\quad g(x) = x\operatorname{th}\frac{1}{x} \qquad \text{c)}\quad h(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Exercice 3.21 $^{(*)}$ *Calculer les dérivées successives de la fonction*

$$x \longmapsto f(x) = e^{x\operatorname{ch}(a)}\operatorname{sh}(x\operatorname{sh}(a)) \quad \textit{où } a \textit{ est un réel fixé.}$$

Exercice 3.22 *Montrer les relations suivantes :*

a) $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, *pour* $x \geqslant 1$.

b) $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, *pour* $x \in \mathbb{R}$.

c) $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, *pour* $x \in]-1, 1[$.

d) $\operatorname{argcoth} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{x-1})$, *pour* $x < -1$ *ou* $x > 1$.

Exercice 3.23 *Donner le domaine de définition et une expression plus simple des fonctions suivantes :*

$$\text{a)}\quad f(x) = \operatorname{argth}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} \qquad \text{b)}\quad g(x) = \operatorname{argch}(4x^3 - 3x)$$

$$\text{c)}\quad h(x) = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) \qquad \text{d)}\quad i(x) = \operatorname{argth}(\frac{x^2-1}{x^2+1})$$

3.8 Test de 30 mn (SMUE11, Automne 2000)

Exercice 1 *Etudier la fonction tangente hyperbolique* th
(Tableau de variation et graphe).

Exercice 2 *Sachant que*

$$\mathrm{ch}(-\ln 4) = \frac{17}{8} \quad \textit{et} \quad \mathrm{sh}(-\ln 4) = -\frac{15}{8},$$

à l'aide de la formule donnant $\mathrm{sh}(a+b)$ *en fonction de* $\mathrm{sh}(a)$, $\mathrm{sh}(b)$, $\mathrm{ch}(a)$ *et* $\mathrm{ch}(b)$, *résoudre l'equation suivante :*

$$17\,\mathrm{sh}(2x) - 15\,\mathrm{ch}(2x) = 8\,\mathrm{sh}(9x-1).$$

Exercice 3 *Résoudre l'equation :*

$$\mathrm{ch}(x) = 4\,\mathrm{sh}(x).$$

Chapitre 4

Primitives et intégrales

4.1 Introduction

A partir d'une liste de *dérivées connues* et de règles de dérivation, on peut dériver toutes les fonctions construites à partir des fonctions élémentaires. On peut se poser la question inverse :

à partir d'une fonction f, peut-on trouver une fonction F dont f soit la dérivée ?

La réponse est beaucoup plus compliquée que les calculs de dérivées. On va voir dans ce chapitre une liste de *primitives connues* et des règles de calcul. Malgré cela, il restera un grand nombre de fonctions simples dont nous ne pourrons pas calculer de primitives. Par exemple, la primitive de $f(x) = \exp(-x^2)$ ne peut pas s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires.

4.2 Définitions et premières propriétés

Définition 4.2.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F'(t) = f(t)$, pour tout $t \in I$.*

Théorème 4.2.2 *Soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.*

a) *si f est continue sur I, alors f admet une primitive F sur I.*

b) *Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout réel α, la fonction $F + \alpha$ est aussi une primitive de f sur I.*

c) *Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $F - G \equiv \alpha$ sur I, où α est une constante réelle.*

Par conséquent, une primitive de f sur I est définie à une constante près. Si F_0 est une primitive particulière de f sur I alors toutes les primitives de f seront de la forme $F_0 + \alpha$, α constante.

Notation : Pour toute fonction g définie sur un intervalle $[a, b]$, on pose $[g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f. On note alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Cette quantité est l'intégrale de f sur $[a, b]$. (On lit "somme de a à b de $f(x)dx$" ou "intégrale de a à b de $f(x)dx$").
De plus, si f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ et si $t_0 \in]a, b[$, alors la fonction F définie, pour $t \in [a, b]$, par

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(x)\, dx$$

est **la** primitive de f qui s'annule en t_0.

D'autre part, une primitive quelconque de f sera notée

$$\int f(x)\, dx\,.$$

Proposition 4.2.3 (Intégration d'une combinaison linéaire de fonctions continues) *Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur un intervalle I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ et αF une primitive de αf (où α est un nombre réel). Plus généralement, $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ (α et β sont des nombres réels).*

Dans la suite, nous allons voir un certain nombre de techniques ou formules permettant de calculer des primitives de fonctions continues particulières. Commençons par donner un tableau de primitives des fonctions classiques.

4.3 Liste des primitives usuelles

Nous allons donc maintenant dresser un tableau qui donne toutes les primitives usuelles.

Ce tableau doit être appris et maitrisé (au même titre que les dérivées des fonctions usuelles).

Les fonctions qui ont un air de famille avec leur dérivée ont souvent un air de famille avec leur primitive. Par exemple $x \mapsto \sin(x)\exp(3x)$ donne par dérivation $\cos(x)\exp(3x) + 3\sin(x)\exp(3x)$ et on peut en chercher une primitive de la forme $\exp(3x)(A\cos(x) + B\sin(x))$. On a aussi le même cas lorsque on cherche une primitive du produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

Fonction	Primitive	Intervalle
$t \mapsto \exp(t)$	$t \mapsto \exp(t) + C$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto t^\alpha, (\alpha \geq 0)$	$t \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} + C$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto t^\alpha, (\alpha < 0, \alpha \neq -1)$	$t \mapsto \dfrac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1} + C$	$\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$
$t \mapsto \dfrac{1}{t}$	$t \mapsto \ln t + C$	$\mathbb{R}^{+*}$
$t \mapsto \cos(t)$	$t \mapsto \sin(t) + C$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto \sin(t)$	$t \mapsto -\cos(t) + C$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto sh(t)$	$t \mapsto ch(t) + C$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto ch(t)$	$t \mapsto sh(t) + C$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$	$\arctan t + C$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin t + C$	$]-1, 1[$

4.4 Intégration par parties.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$, on a alors

$$(uv)' = u'v + uv'$$

En lisant cette formule avec des *yeux de primitives* on lit

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx\,.}$$

Cette formule sera utilisée lorsque la primitive de droite est plus facile à calculer que celle de gauche. On y fera référence sous le nom de *formule d'intégration par parties.*

Un premier exemple : On se propose de calculer $\int_1^5 x \ln x\, dx$.

Posons $u'(x) = x$ d'où $u(x) = x^2/2$ et $v(x) = \ln x$ d'où $v'(x) = 1/x$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_1^5 x \ln x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^5 - \int_1^5 (x^2/2)(1/x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^5 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^5 .$$

Ainsi, $\int_1^5 x \ln x \, dx = (25/2) \ln 5 - 6$. La même formule montre que $\dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4}$ est une primitive de $x \ln x$.

Un second exemple : On se propose de calculer $\int_0^x t \exp(t) dt$, c'est à dire la primitive de la fonction $t \mapsto t \exp(t)$, qui s'annule en 0.

Posons $u'(t) = \exp(t)$ d'où $u(t) = \exp(t)$ et $v(t) = t$ d'où $v'(t) = 1$. On obtient alors

$$\int_0^x t \exp(t) dt = [t \exp(t)]_0^x - \int_0^x \exp(t) dt = x \exp(x) - \exp(x) + 1.$$

Proposition 4.4.1 *Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons*

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} .$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n ,$$

et $I_1 = \arctan x$.

preuve : Calculons I_n : intégrons par parties en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$. On obtient alors

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx .$$

Ecrivons alors que $x^2 = (x^2+1) - 1$ dans le dernier terme du second membre :

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx = I_n - I_{n+1} .$$

En remplaçant, il vient

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1} .$$

4.5 Changement de variable.

Soit φ une fonction dérivable, strictement croissante et à dérivée continue sur $[c, d]$. Soit f une fonction continue sur $[\varphi(c), \varphi(d)]$. Alors on a

$$\boxed{\int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx .}$$

Cette formule est *la formule du changement de variable.*

Un premier exemple : On veut calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t \, dt$. On voit ici que $\cos t$ est la dérivée de $\sin t$ et, sur $[0, \pi/2]$, sin est une bijection strictement croissante à dérivée continue. En prenant $\varphi(t) = \sin(t)$, $f(x) = x^2$ on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\pi/2) = 1$. La formule précédente s'écrit

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^2 \sin'(t) \, dt = \int_0^1 x^2 \, dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3.$$

Remarque importante : La formule du changement de variable est en fait utilisée surtout dans le sens inverse. Pour calculer $\int_a^b f(x) \, dx$, on va chercher une fonction φ convenable et lire la formule de la droite vers la gauche. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et soit φ une fonction dérivable, strictement croissante et à dérivée continue de $[c, d]$ sur $[a, b]$ (de sorte que $a = \varphi(c)$ et $b = \varphi(d)$). On a alors la formule

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt\,.}$$

Un second exemple : On veut calculer une primitive de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x-1}$ sur un intervalle $I \subset [1, \infty]$. On va poser $t = \sqrt{x-1}$, c'est à dire $x = t^2 + 1$. Par suite, on pose $\varphi(t) = t^2 + 1$. La fonction φ est donc dérivable, strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ et de dérivée $\varphi'(t) = 2t$ continue. On peut donc appliquer la formule de changement de variable qui donne

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1}\, dx &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt \\ &= \int t(t^2+1)2t \, dt \\ &= 2\int (t^4 + t^2) \, dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C, \quad C \text{ constante}. \end{aligned}$$

D'où, puisque $t = \sqrt{x-1}$, une primitive de $x\sqrt{x-1}$ est

$$(2/5)(x-1)^{5/2} + (2/3)(x-1)^{3/2} + C\,.$$

4.6 Primitives des fractions rationnelles

4.6.1 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Définition 4.6.1 *On appelle fraction rationnelle une fonction numérique qui s'écrit comme quotient de deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$, i.e.*

$$f(x) = \frac{P(x)}{R(x)}, \quad \textit{avec } P(x) \textit{ et } Q(x) \in \mathbb{R}[x].$$

L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$ est notée $\mathbb{R}(x)$.

Pour calculer les primitives des fractions rationnelles, il est nécessaire de rappeler un certain nombre de résultats sur les polynômes et sur ces fractions rationnelles.

Notation : pour un polynôme $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, le degré de $P(x)$ sera noté $\mathrm{d}^\circ P$.

Définition 4.6.2 *Etant donnés deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$, $(B(x) \neq 0)$ dans $\mathbb{R}[x]$, on appelle division euclidienne (ou division selon les puissances croissantes) de $A(x)$ par $B(x)$ l'unique couple de polynômes $(Q(x), R(x))$ tel que*

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x), \quad \textit{avec } R(x) = 0 \textit{ ou } \mathrm{d}^\circ R < \mathrm{d}^\circ B\,.$$

Si $R(x) = 0$, on dit que B divise A.

Un exemple : le calcul explicite de ce couple (Q, R) se fait par le biais d'un algorithme semblable à celui de la division de deux entiers. Donnons un exemple : soit à diviser le polynôme $A(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ par le polynôme $B(x) = x^2 + x + 2$.

Le premier terme du quotient Q est obtenu en divisant le terme de plus haut degré de $A(x)$ (soit $3x^3$) par le terme de plus haut degré de $B(x)$ (soit x^2) : c'est donc $3x$. On multiplie alors $B(x)$ par $3x$ et on retranche le résultat à $A(x)$; on obtient le "premier reste" : $R_1(x) = -x^2 - 2x + 1$. On recommence en remplaçant le polynôme $A(x)$ par $R_1(x)$: le deuxième terme du quotient Q est donc obtenu en divisant $-x^2$ par x^2, i.e. -1. Le "second reste" est $R_2(x) = -x + 3$. L'algorithme s'arrête puisque le degré de $R_2(x)$ est strictement plus petit que celui de $B(x)$. On a obtenu

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x), \quad \text{avec } Q(x) = 3x - 1, \text{ et } R(x) = -x + 3\,.$$

Pratiquement, on dispose la division comme dans le cas des nombres entiers :

dividende	$3x^3$	$+2x^2$	$+4x$	$+1$	x^2	$+x$	$+2$	diviseur
	$3x^3$	$+3x^2$	$+6x$		$3x$	-1		quotient
1er reste	0	$-x^2$	$-2x$	$+1$				
		$-x^2$	$-x$	-2				
2-ième reste		0	$-x$	$+3$				

Définition 4.6.3 *Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de $\mathbb{R}[x]$, $a_n \neq 0$.*

a) *On dit que P est irréductible (dans $\mathbb{R}[x]$) s'il n'est divisible que par λ et λP, (λ élément quelconque de $\mathbb{R}^*$).*

b) *On dit que P est un polynôme unitaire si $a_n = 1$ (i.e. si le coefficient de terme de plus haut degré est égal à 1).*

Théorème 4.6.4 *Tout polynôme $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) en un produit de polynômes irréductibles unitaires et d'une constante. De façon plus précise :*

a) *Dans $\mathbb{R}[x]$, les seuls polynômes irréductibles unitaires sont les polynômes de degré 0, i.e. les constantes, les polynômes de degré 1, i.e. de la forme $x+a$, et les polynômes du second degré x^2+bx+c, avec $b^2-4c<0$, i.e. sans racines réelles.*

b) *Tout polynôme $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $(P(x) \neq 0)$ s'écrit*

$$P(x) = a \prod_{1 \leqslant k \leqslant p} (x-a_k)^{\alpha_k} \prod_{1 \leqslant k \leqslant q} (x^2+b_kx+c_k)^{\beta_k}\,,$$

les facteurs étant tous deux à deux distincts, les exposants supérieurs ou égaux à 1 et pour tout $k = 1, \ldots, q$, on a $b_k^2 - 4c_k < 0$.

Théorème 4.6.5 *Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(x)$. On suppose que $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont pas de diviseurs communs. Soit*

$$Q(x) = a \prod_{1 \leqslant k \leqslant p} (x-a_k)^{\alpha_k} \prod_{1 \leqslant k \leqslant q} (x^2+b_kx+c_k)^{\beta_k}$$

la décomposition de $Q(x)$ en facteurs irréductibles. Alors, on peut écrire, de manière unique,

$$f(x) = E(x) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \sum_{1 \leqslant j \leqslant \alpha_i} \frac{A_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \sum_{1 \leqslant j \leqslant \beta_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2+b_ix+c_i)^j}\,,$$

où les $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes réelles et $E(x)$ est un polynôme de degré égal à $d^\circ E = d^\circ P - d^\circ Q$ si $d^\circ P \geqslant d^\circ Q$ et $E(x) = 0$ sinon.

Définition 4.6.6 *L'écriture de f qui précède s'appelle la décomposition de f en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$. Le polynôme $E(x)$ est appelé la partie entière de la fraction rationnelle $f(x)$.*

4.6.2 Un exemple de calcul d'une telle décomposition

L'unicité de la décomposition permet de mettre en oeuvre un certain nombre de recettes et techniques pour en calculer tous les coefficients.

- Tout d'abord, la partie entière n'est rien d'autre que le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$. On commence donc par écrire

$$P(x) = Q(x)E(x) + R(x)\,, \quad \text{avec } \mathrm{d}^\circ R < \mathrm{d}^\circ Q, \text{ ou } R(x) = 0\,.$$

On en déduit

$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,, \quad \text{avec } \mathrm{d}^\circ R < \mathrm{d}^\circ Q, \text{ ou } R(x) = 0\,.$$

- On cherche ensuite la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ qui s'écrit formellement

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{1\leqslant i\leqslant p}\sum_{1\leqslant j\leqslant \alpha_i} \frac{A_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{1\leqslant i\leqslant q}\sum_{1\leqslant j\leqslant \beta_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2+b_ix+c_i)^j}\,.$$

Il reste à calculer les coefficients explicitement. Nous allons le faire sur un exemple qui aura valeur générale.

Exemple : soit à calculer la décomposition en éléments simples de

$$f(x) = \frac{x+3}{x^4+3x^3+5x^2+5x+2}\,.$$

Tout d'abord, remarquons que comme d°$(x+3) <$ d°$(x^4+3x^3+5x^2+5x+2)$, on a $E(x) = 0$.

Il s'agit maintenant de factoriser $Q(x) = x^4+3x^3+5x^2+5x+2$ en produit de polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{R}[x]$. Pour cela, on commence par chercher les racines réelles. On remarque que -1 est racine et en effectuant la division euclidienne de $Q(x)$ par $x+1$, on obtient $Q(x) = (x+1)(x^3+2x^2+3x+2)$. On remarque à nouveau que -1 est racine de x^3+2x^2+3x+2 et on a $x^3+2x^2+3x+2 = (x+1)(x^2+x+2)$, où le polynôme x^2+x+2 n'a pas de racines réelles. Par conséquent, la factorisation de $Q(x)$ en facteurs irréductibles est la suivante

$$Q(x) = (x+1)^2(x^2+x+2)\,.$$

D'après le théorème 4.6.5, on sait donc que la décomposition de $f(x)$ en éléments simples est

$$f(x) = \frac{x+3}{(x^2+x+2)(x+1)^2} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)^2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+x+2}\,, \tag{4.1}$$

où a_1, a_2, b_1 et c_1 sont quatre constantes réelles.

Une première méthode pour calculer ces coefficients est d'écrire que

$$\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{(x+1)^2}+\frac{b_1x+c_1}{x^2+x+2} = \frac{a_1(x+1)(x^2+x+2)+a_2(x^2+x+2)+(b_1x+c_1)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+x+2)} =$$

$$= \frac{(a_1+b_1)x^3+(2a_1+a_2+2b_1+c_1)x^2+(3a_1+a_2+b_1+2c_1)x+2a_1+2a_2+c_1}{(x+1)^2(x^2+x+2)}.$$

Puis on identifie le polynôme $(a_1+b_1)x^3+(2a_1+a_2+2b_1+c_1)x^2+(3a_1+a_2+b_1+2c_1)x+2a_1+2a_2+c_1$ au polynôme $x+3$, ce qui donne le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} a_1+b_1=0 \\ 2a_1+a_2+2b_1+c_1=0 \\ 3a_1+a_2+b_1+2c_1=1 \\ 2a_1+2a_2+c_1=3\,. \end{cases}$$

En utilisant la technique du pivot de Gauss par exemple, on trouve $a_1=1$, $a_2=1$, $b_1=-1$ et $c_1=-1$.

Une deuxième méthode consiste à utiliser certaines astuces pour calculer facilement certains coefficients, en évitant de résoudre des systèmes pouvant être parfois compliqués. Par exemple, le calcul de a_2 est trés facile : on multiplie les deux membres de l'égalité (4.1) par $(x+1)^2$ et on donne à x la valeur -1; on obtient ainsi $a_2=1$. On calcule alors

$$\begin{aligned} f(x)-\frac{a_2}{(x+1)^2} &= \frac{x+3}{(x^2+x+2)(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+1}{(x^2+x+2)(x+1)^2} \\ &= \frac{-x+1}{(x^2+x+2)(x+1)} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{-x+1}{(x^2+x+2)(x+1)}=\frac{a_1}{x+1}+\frac{b_1x+c_1}{x^2+x+2}\,. \tag{4.2}$$

Pour calculer a_1, on multiplie alors les deux membres de l'égalité (4.2) par $x+1$ et on donne à x la valeur -1; on obtient alors $a_1=1$.
Pour calculer b_1, on peut multiplier l'égalité (4.2) par x et faire tendre x vers $+\infty$. On obtient $0=a_1+b_1$, soit $b_1=-1$. Enfin pour c_1, on peut donner à x une valeur particulière, par exemple 0 et on obtient $c_1=-1$. Par conséquent, la décomposition de f en éléments simples s'écrit

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-x-1}{x^2+x+2}\,.$$

4.6.3 Calcul de primitives des fractions rationnelles

Le calcul des primitives d'une fraction rationnelle est fondé sur la décomposition en éléments simples. Etant donnée une fraction rationnelle $f(x)\in\mathbb{R}(x)$, on commence par la décomposer en éléments simples et, par la proposition 4.2.3, une primitive de $f(x)$ est obtenue en ajoutant une primitive de chacun des "éléments simples". Il suffit donc de savoir calculer une primitive de

$$E(x)\in\mathbb{R}[x]\,,\ \frac{a}{(x-b)^n}\,(n\in\mathbb{N}^*)\,,\ \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}\,(n\in\mathbb{N}^*)\,,\ \text{avec } c^2-4d<0\,.$$

- Pour un polynôme, on sait calculer une primitive.....(voir tableau de la section 4.3).
- Une primitive de $\dfrac{a}{(x-b)^n}$ sur tout intervalle fermé I ne contenant pas le point b est
$$\int \frac{a}{(x-b)^n}\,dx = \begin{cases} a\ln|x-b|\,, & \text{si } n=1 \\ \dfrac{1}{(1-n)}\dfrac{a}{(x-b)^{n-1}}\,, & \text{si } n \geqslant 2\,. \end{cases}$$
- Reste à calculer une primitive de $\dfrac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$.
Tout d'abord, on fait apparaître au numérateur la dérivée de x^2+cx+d, c'est à dire
$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n}\,dx + \frac{a}{2}\left(\frac{2b}{a}-c\right)\int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}\,.$$
Si $a=0$, il n'y a que le dernier terme à calculer dans la formule précédente. Le premier terme a une primitive aisée à calculer :
$$\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n}\,dx = \begin{cases} \ln(x^2+cx+d)\,, & \text{si } n=1 \\ \dfrac{1}{(1-n)}\dfrac{1}{(x^2+cx+d)^{n-1}}\,, & \text{si } n \geqslant 2\,. \end{cases}$$
Nous devons maintenant traiter le deuxième terme, soit chercher une primitive de $\dfrac{1}{(x^2+cx+d)^n}$. Ecrivons
$$x^2+cx+d = \left(x+\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{4d-c^2}{4}$$
et faisons le changement de variable $u = \dfrac{2x+c}{\sqrt{4d-c^2}}$, en remarquant que $4d-c^2$ est positif. On obtient
$$\int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n} = \frac{2^{2n-1}}{(4d-c^2)^{n-\frac{1}{2}}}\int \frac{du}{(1+u^2)^n}\,.$$
On vient de ramener le calcul à celui des primitives de
$$\frac{1}{(1+u^2)^n}\,, \quad \text{pour } n \geqslant 1\,,$$
qui a été fait à la proposition 4.4.1.

4.7 Primitives se ramenant au cas précédent

Un certain nombre de primitives peuvent, par un changement de variable, se ramener au cas précédent.

4.7.1 Fractions rationnelles en les fonctions trigonométriques

Proposition 4.7.1 *Soit $F(x,y)$ une fraction rationnelle en les deux variables x et y (i.e. le quotient de deux polynômes à deux variables x et y). Considérons la primitive*

$$\int F(\sin x, \cos x)\, dx\,.$$

Alors le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, pour $x \neq (2k+1)\pi$, ramène le calcul de cette primitive au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en t.
Plus précisément, si l'élément différentiel $F(\sin x, \cos x)\, dx$ est invariant par le changement de variable $x \mapsto -x$ (resp. $x \mapsto \pi - x$, $x \mapsto \pi + x$), le changement de variable $t = \cos x$ (resp. $t = \sin x$, $t = \tan x$) ramène le calcul au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en t.

Un exemple : soit à calculer

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin^2 x}\, dx\,.$$

On remarque que

$$\frac{\cos(\pi - x)}{2+\sin^2(\pi - x)}\, d(\pi - x) = \frac{\cos x}{2+\sin^2 x}\, dx\,.$$

Par conséquent, le changement de variable $x \to \pi - x$ laisse invariant l'élément différentiel. On pose donc $u = \varphi(x) = \sin x$. D'après la formule de changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{2+\sin^2 x}\, dx &= \int \frac{du}{2+u^2} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + \mathrm{Cte} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + \mathrm{Cte}\,.
\end{aligned}$$

4.7.2 Fractions rationnelles en la fonction exponentielle

Il s'agit ici de calculer une primitive de la forme

$$\int f(\exp(x))\, dx \quad \text{ou} \quad \int F(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\, dx\,,$$

où $f(x)$ est une fraction rationnelle en x et $F(x,y)$ est une fraction rationnelle en x et y.

Proposition 4.7.2 *Le changement de variable $u = \exp(x)$ ramène le calcul d'une primitive de $f(\exp(x))$ (resp. $F(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$) en le calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en u.*

Un exemple : soit à calculer
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}\,.$$
Faisons le changement de variable $u = \varphi(x) = \exp(x)$. On obtient
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} &= 2\int \frac{dx}{\exp(x)+\exp(-x)}\\ &= 2\int \frac{du}{u\left(u+\dfrac{1}{u}\right)}\\ &= 2\int \frac{du}{1+u^2}\\ &= 2\arctan(\exp(x)) + \mathrm{Cte}\,.\end{aligned}$$

4.8 Exercices

Intégration par parties

Exercice 4.1 *Calculer par parties les intégrales ou primitives suivantes :*

$$\text{a)}\ \int_0^1 xe^{-x}\,dx, \qquad \text{b)}\ \int x\sin(2x)\,dx, \qquad \text{c)}\ \int_0^{\pi/2} x^2\cos(3x)\,dx$$
$$\text{d)}\ \int x^2\ln x\,dx \quad \textit{et} \quad \text{e)}\ \int x^n\ln x\,dx \ \ (\textit{avec } n\in\mathbb{Z}).$$

Exercice 4.2 *Calculer*

$$\int_0^1 \arctan(x)\,dx \quad \textit{puis} \quad \int_0^1 x\arctan^2(x)\,dx.$$

Exercice 4.3 *Calculer par parties les intégrales ou primitives suivantes :*

$$\text{a)}\ \int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx, \qquad \text{b)}\ \int \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx \qquad \text{c)}\ \int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx,$$
$$\text{d)}\ \int_0^{\pi/2} \cos(x)\ln(1+\cos x)\,dx, \qquad \text{e)}\ \int \exp(x)\cos(x)\,dx,$$
$$\text{f)}\ \int x\arctan x\,dx, \qquad \text{g)}\ \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx, \qquad \text{h)}\ \int \sin(\ln x)\,dx \quad \textit{et}$$
$$\text{i)}\ \int_{-1}^1 (x^2+5x+6)\cos(2x)\,dx.$$

Exercice 4.4 *Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx.$$

a) *Calculer I_0 et I_1.*

b) *Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 2$:*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

c) $^{(*)}$ *En déduire les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1} pour tout entier $n \geq 0$.*

Changements de variables

Exercice 4.5 *Calculer les primitives suivantes en effectuant le changement de variable indiqué.*

$$\text{a)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} \ (\textit{poser } x = 1/t), \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{dx}{\exp(x)+1} \ (\textit{poser } x = -\ln(t)),$$

$$\text{c)} \int x(5x^2-3)^7 dx \ (\textit{poser } t = 5x^2-3) \quad \textit{et} \quad \text{d)} \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} \ (\textit{poser } t = \sqrt{x+1}).$$

Exercice 4.6 *Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :*

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \ (\textit{poser } x = \tan u), \qquad \text{b)} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x} \ (\textit{poser } u = \tan(x/2)),$$

$$\text{c)} \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \ (\textit{poser } u = e^{-x}), \qquad \text{d)} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + \sin x} \ (\textit{poser } u = \tan(x/2)),$$

$$\text{e)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\, dx \ (\textit{poser } u = \sin x).$$

Exercice 4.7 *Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :*

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx, \qquad \text{b)} \int \frac{dx}{x\sqrt{\exp(x)-1}} \quad \textit{et} \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{\exp(2x)}{\sqrt{\exp(x)+1}} dx$$

Exercice 4.8 *Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :*

$$\text{a)} \int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx, \qquad \text{b)} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)}, \qquad \text{c)} \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\, dx,$$

$$\text{d)} \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}, \qquad \text{e)} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx \ (\textit{avec } a \in \mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad \text{f)} \int \frac{dx}{x\ln x}.$$

Exercice 4.9 *Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :*

$$\text{a)} \int_1^4 \frac{x\, dx}{\sqrt{4x+2}}, \qquad \text{b)} \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx, \qquad \text{c)} \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{1+x}},$$

$$\text{d)} \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\, dx \quad \textit{et} \quad \text{e)} \int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\, dx.$$

Exercice 4.10 *Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :*

$$\text{a)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}, \qquad \text{b)}\quad \int \frac{1}{x\tan(\ln x)}\,dx,$$

$$\text{c)}\quad \int_{0}^{1} \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,dx, \qquad \text{d)}\quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \quad \textit{et} \quad \text{e)}\quad \int_0^1 \arcsin^2(x)\,dx.$$

Exercice 4.11 *En utilisant le changement de variable* $x = \tan u$*, calculer l'intégrale :*

$$\int_0^1 \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

On rappelle la formule : $\sin(2u) = \dfrac{2\tan u}{1+\tan^2 u}$.

Exercice 4.12

a) *Montrer, en utilisant un changement de variable, que :*

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\,du.$$

b) *Calculer*

$$\int \frac{u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\,du$$

et en déduire la valeur de

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}.$$

Primitives et Intégrales des fractions rationnelles

Exercice 4.13 *Calculer les primitives et intégrales suivantes :*

$$\text{a)}\quad \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx, \qquad \text{b)}\quad \int \frac{5x+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx, \qquad \text{c)}\quad \int_0^2 \frac{dx}{x(x+1)^2},$$

$$\text{d)}\quad \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx, \qquad \text{e)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4+1}, \qquad \text{f)}\quad \int \frac{dx}{x^4+x^2+1},$$

$$\text{g)}\quad \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\,dx \quad \textit{et} \quad \text{h)}\quad \int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx.$$

Exercice 4.14 *Calculer les primitives suivantes :*

$$\text{a)}\quad \int \frac{x^3-2x}{x+1}\,dx, \qquad \text{b)}\quad \int \frac{dx}{4-9x^2}, \qquad \text{c)}\quad \int \frac{x\,dx}{(x+1)^3},$$

$$\text{d)}\quad \int \frac{x\,dx}{x^2+2x+10} \quad \textit{et} \quad \text{e)}\quad \int \frac{dx}{4x^2-4x-3}.$$

Exercice 4.15 *Calculer les intégrales et primitives suivantes :*

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3(x+1)}$, b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$, c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$,
d) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx$,

Primitives et intégrales des fonctions circulaires

Exercice 4.16 *En utilisant la formule :*

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

calculer :

$$\text{a)} \quad \int \sin^2 x\,dx, \qquad \text{b)} \quad \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx \quad \textit{et} \quad \text{c)} \quad \int \sin^4 x\,dx.$$

Exercice 4.17 *En utilisant la décomposition du produit*

$$\cos x \cos 3x \sin 5x$$

en une somme de $\sin 9x$, $\sin 7x$, $\sin 3x$ *et* $\sin x$, *calculer l'intégrale :*

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 3x \sin 5x\,dx.$$

Exercice 4.18 *Calculer les primitives suivantes :*

$$\text{a)} \quad \int \tan x\,dx, \qquad \text{b)} \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx \quad \textit{et} \quad \text{c)} \quad \int \cos^3 x\,dx.$$

Exercice 4.19 *En utilisant la formule pour la dérivée de* $\tan x$, *calculer :*

$$\text{a)} \quad \int \tan^2 x\,dx, \qquad \text{b)} \quad \int \tan^3 x\,dx.$$

Exercice 4.20 *Calculer les primitives suivantes :*

$$\text{a)} \quad \int \cos^3 x\,dx, \qquad \text{b)} \quad \int \sin^2(x/2)\cos^3(x/2)\,dx,$$
$$\text{c)} \quad \int \sin 3x \cos 5x\,dx \quad \textit{et} \quad \text{d)} \quad \int \sin 9x \sin x\,dx.$$

Autres exercices...

Exercice 4.21 *Trouver la formule de récurrence permettant de calculer l'intégrale*

$$\int x^n \exp(-x)\, dx$$

où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.22 *Calculer* $\displaystyle\int x^3 \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$.

Exercice 4.23 (*) *Calculer la dérivée de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \int_x^{x^2+1} e^{-t^2}\, dt.$$

Exercice 4.24 (*) *On considère la fonction* f *définie sur l'intervalle* $[-\pi/4; \pi/4]$ *par :*

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt.$$

a) *Montrer que* f *est impaire.*

b) *Tracer sommairement le graphe de* f.

c) *Montrer que l'on a :* $f(x) \leq x$ *si* $0 \leq x \leq \pi/4$.

Exercice 4.25 *Calculer les primitives suivantes :*

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2 + \sin^2 x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \cos x}$

c) $\displaystyle\int \sqrt{2x^2 + x + 2}\, dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{-2x^2 + 6x - 4}\, dx$

Exercice 4.26 *Soit* f *une fonction définie et continue sur* $[0, +\infty[$ *telle que, pour tout* $x \geqslant 0$, *on a*

$$f(x) = \int_0^x f(t)\, dt\,.$$

Montrer que f *est identiquement nulle.*

Chapitre 5

Equations différentielles

5.1 Equations différentielles à coefficients constants

5.1.1 Equations du premier ordre du type $y' = ay$ avec a réel

Soit a un réel.

Définition 5.1.1 *Une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable et telle que $f'(x) = af(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

La fonction nulle est une solution, de même que la fonction $f(x) = \exp(ax)$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 5.1.2 *Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont exactement les fonctions (définies sur $\mathbb{R}$) $x \longmapsto \lambda \exp(ax)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Preuve : La preuve est facile. Pour λ quelconque fixé, la fonction $x \longmapsto \lambda \exp(ax)$ est évidemment solution. Réciproquement, si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation $y' = ay$, on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)\exp(-ax)$ qui est dérivable comme produit de fonctions dérivables. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = (f'(x) - af(x))\exp(-ax).$$

Comme f vérifie $f' = af$, la fonction h' est donc identiquement nulle et donc h est constante. Si l'on note λ la valeur constante de la fonction h, on a alors

$$\lambda = f(x)\exp(-ax) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On obtient ainsi $f(x) = \lambda \exp(ax)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5.1.2 Equations du second ordre du type $ay'' + by' + cy = 0$.

Soient a, b, c trois nombres réels, $a \neq 0$.

Définition 5.1.3 *Une solution de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$ *est une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fois dérivable et telle que* $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

La méthode de résolution consiste d'abord à étudier le polynôme du second degré $aX^2 + bX + c$ qui admet toujours deux racines réelles ou complexes, éventuellement confondues. L'équation $aX^2 + bX + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** de $ay'' + by' + cy = 0$. Le résultat à retenir est le suivant :

Proposition 5.1.4 (équation $ay'' + by' + cy = 0$, $a \neq 0$) *Les solutions de cette équation différentielle sont données en fonction des racines du polynôme* $P(X) = aX^2 + bX + c$.

1. *Si les racines de* $P(X)$ *sont* r_1 *et* r_2 *deux réels distincts, les solutions sont les fonctions (définies sur* $\mathbb{R}$*) de la forme :*

$$x \longmapsto \lambda \exp(r_1 x) + \mu \exp(r_2 x) \text{ où } \lambda, \mu \text{ sont des réels.}$$

2. *Si* $P(X) = 0$ *a une racine (réelle) double* r, *les solutions sont les fonctions (définies sur* $\mathbb{R}$*) de la forme :*

$$x \longmapsto (\lambda x + \mu) \exp(rx) \text{ où } \lambda, \mu \text{ sont des réels.}$$

3. *Si les racines de* $P(X)$ *sont complexes (nécessairement conjuguées) et de la forme* $r + is$ *et* $r - is$ *(avec* $r, s \in \mathbb{R}$*) les solutions sont les fonctions (définies sur* $\mathbb{R}$*) de la forme :*

$$x \longmapsto (\lambda \cos(sx) + \mu \sin(sx)) \exp(rx) \text{ où } \lambda, \mu \text{ sont des réels.}$$

Remarques :

1. S'il y a une racine double r, elle est nécessairement réelle car $r = -b/2a$.

2. Chacune des trois expressions données dans la proposition précédente est de la forme $f = \lambda u + \mu v$, où u et v sont deux solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$. Plus généralement on a le résultat suivant :

   Proposition 5.1.5 *Soient* u *et* v *deux solutions non nulles de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$. *Si ces solutions ne sont pas proportionnelles, c'est à dire s'il n'existe pas de constante* $k \in \mathbb{R}$ *telle que* $u(x) = kv(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *alors les solutions de* $ay'' + by' + cy = 0$ *sont les fonctions* $\lambda u + \mu v$ *où* λ *et* μ *sont des réels.*

5.1.3 Equation $ay'' + by' + cy = g$, $a \neq 0$.

On étudie maintenant l'équation

$$(E) \;\; ay'' + by' + cy = g,$$

dans laquelle a, b et c désignent toujours trois nombres réels, $a \neq 0$ et où g désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.1.6 *Une solution de l'équation différentielle (E) est une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Méthode de résolution

La méthode de résolution comporte toujours les deux étapes suivantes :

- **Première étape** : Déterminer la solution générale f_1 de l'équation sans second membre

  $$(E_1) \;\; ay'' + by' + cy = 0.$$

  Cette solution est donnée par la Proposition 5.1.4.

- **Deuxième étape** : Déterminer une solution particulière f_0 de l'équation (E).

La solution générale f de (E) est alors $f = f_0 + f_1$, ce qu'on écrit :

$$\boxed{\text{Solution générale de } (E) = \text{ Solution générale de } (E_1) + \text{ Solution particulière de } (E)}.$$

Recherche d'une solution particulière

Les cas à connaître sont ceux où la fonction g du second membre est de l'une des trois formes suivantes :

a) $g(x) = P(x)$ (P désigne un polynôme).

b) $g(x) = \exp(\alpha x)P(x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $g(x) = \exp(\alpha x)P(x)(K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x))$ où $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

Pour des fonctions g plus générales, il existe d'autres méthodes qu'on ne verra pas ici.
Nous donnons maintenant les règles permettant de trouver une solution particulière de (E) dans chacun de ces cas. On désigne toujours par P un polynôme et par d°P son degré.
a) $\underline{ay'' + by' + cy = P}$.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme Q avec :

$$\text{d}^\circ Q = \begin{cases} \text{d}^\circ P & \text{si} \quad c \neq 0 \\ \text{d}^\circ P + 1 & \text{si} \quad c = 0, b \neq 0 \;\; (ay'' + by' = P) \\ \text{d}^\circ P + 2 & \text{si} \quad c = 0 = b \;\; (ay'' = P) \end{cases}$$

b) $ay'' + by' + cy = g$ où $g(x) = \exp(\alpha x)P(x)$, α réel non nul.
Il y a trois possibilités suivant que α est ou non une racine de l'équation caractéristique $aX^2 + bX + c = 0$.

- Si α n'est pas racine de $aX^2 + bX + c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$f_0(x) = \exp(\alpha x)Q(x) \text{ avec } \mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P.$$

- Si α est une racine **simple** de $aX^2+bX+c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$f_0(x) = \exp(\alpha x)xQ(x) \text{ avec } \mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P.$$

- Si α est une racine **double** de $aX^2+bX+c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$f_0(x) = \exp(\alpha x)x^2Q(x) \text{ avec } \mathrm{d}^\circ Q = \mathrm{d}^\circ P.$$

c) $ay'' + by' + cy = g$ où $g(x) = \exp(\alpha x)P(x)(K_1\cos(\beta x) + K_2\sin(\beta x))$, α, β réels non nuls.

- Si $\alpha+i\beta$ n'est pas racine de $aX^2+bX+c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$f_0(x) = \exp(\alpha x)(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)) \text{ avec } \mathrm{d}^\circ Q_1 = \mathrm{d}^\circ Q_2 = \mathrm{d}^\circ P.$$

- Si $\alpha+i\beta$ est racine de $aX^2+bX+c = 0$, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$f_0(x) = x\exp(\alpha x)(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)) \text{ avec } \mathrm{d}^\circ Q_1 = \mathrm{d}^\circ Q_2 = \mathrm{d}^\circ P.$$

Cas où le second membre est somme de fonctions

Supposons par exemple que l'équation soit

$$(E)\ \ ay'' + by' + cy = g_1 + g_2 + g_3.$$

La méthode pour trouver dans ce cas une solution particulière de (E) consiste à chercher successivement une solution particulière pour chacune des équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (E_1) & ay'' + by' + cy = g_1 \\ (E_2) & ay'' + by' + cy = g_2 \\ (E_3) & ay'' + by' + cy = g_3. \end{array}$$

Si f_{01} est une solution particulière de (E_1), si f_{02} est une solution particulière de (E_2) et si f_{03} est une solution particulière de (E_3), la fonction $f_0 = f_{01} + f_{02} + f_{03}$ est alors une solution particulière de (E).
En effet, nous avons

$$\begin{aligned} af''_{01} + bf'_{01} + cf_{01} = g_1 \\ af''_{02} + bf'_{02} + cf_{02} = g_2 \\ af''_{03} + bf'_{03} + cf_{03} = g_3. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre et en regroupant en facteur, on obtient :

$$a(f_{01} + f_{02} + f_{03})'' + b(f_{01} + f_{02} + f_{03})' + c(f_{01} + f_{02} + f_{03}) = g_1 + g_2 + g_3.$$

5.2 Equations différentielles du premier ordre

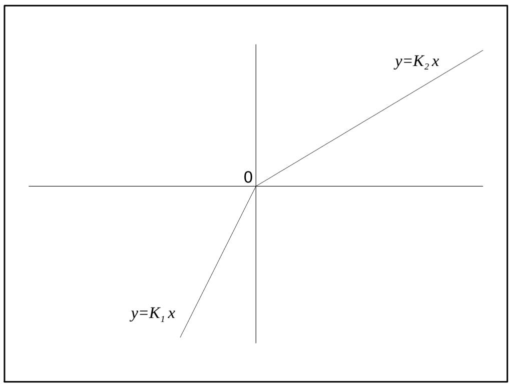
Dans ce paragraphe, les équations différentielles considérées font intervenir des relations entre y, y' et d'autres fonctions qui ne sont pas nécessairement définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Dans ce cas la recherche d'une solution nécessite aussi d'expliciter l'intervalle sur lequel elle est définie.

5.2.1 Exemple

Soit l'équation $y' = \dfrac{y}{x}$, avec $x \neq 0$. On cherche une fonction u définie sur un intervalle I ne contenant pas 0 et telle que $u'(x) = u(x)/x$, pour tout $x \in I$. En dérivant $u(x)/x$ pour $x \in I$, on obtient $(xu'(x) - u(x))/x^2 = 0$. Donc

$$\frac{u(x)}{x} = K \text{ (=constante)}$$

pour $x \in I$. Ce calcul est valable sur tout intervalle ne contenant pas 0. Il fournit ainsi toutes les solutions de l'équation $y' = y/x$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ sous la forme $u_1(x) = K_1 x$ et toutes les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$ sous la forme $u_2(x) = K_2 x$
Mais on a aussi comme solutions les fonctions obtenues en "juxtaposant" deux des fonctions précédentes avec des constantes K_1 et K_2 quelconques. Le graphe d'une telle fonction obtenu par juxtaposition a l'allure suivante :



5.2.2 Equation linéaire $a(x)y' = b(x)y + c(x)$

On considère ici trois fonctions a, b et c définies et continues sur le même intervalle I et soit J un intervalle contenu dans I.

Définition 5.2.1

a) *Résoudre l'équation différentielle*

$$(E) \quad a(x)y' = b(x)y + c(x)$$

sur l'intervalle J, c'est trouver toutes les fonctions f définies et dérivables sur J vérifiant

$$a(x)f'(x) = b(x)f(x) + c(x), \quad \textit{pour tout } x \in J\,.$$

On appelle une telle fonction f une solution sur J de l'équation (E).

b) *Une solution maximale de (E) est une solution définie sur un intervalle (maximal) $I_0 \subset I$ telle qu'il n'existe pas d'intervalle plus grand contenant I_0 et sur lequel l'équation (E) admet une solution.*

c) *Résoudre (E), c'est trouver l'ensemble des solutions maximales de (E).*

Remarque : il n'existe pas nécéssairement de solutions définies sur tout l'intervalle I (voir exemple un peu plus bas). C'est pourquoi se pose le problème de la recherche de la solution maximale. C'est donc une difficulté supplémentaire par rapport aux équations différentielles vues jusque là..........

$\boxed{\textbf{Equation } y' = b(x)y}$ $\quad (a(x) = 1,\, c(x) = 0,\, \forall x \in I)$

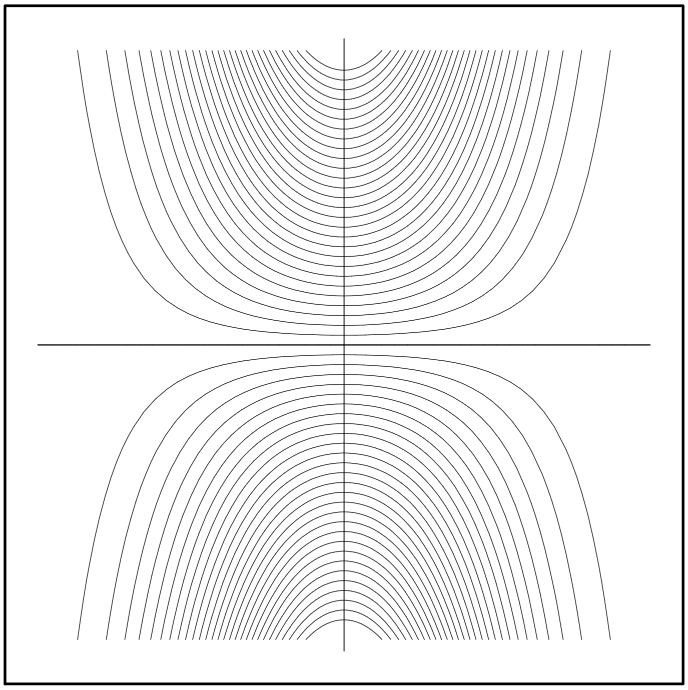
Proposition 5.2.2 *Soit b une fonction continue sur un intervalle I et soit B une primitive de b sur I (qui existe d'après le théorème 4.2.2). Alors, les solutions sur I de l'équation différentielle $y' = b(x)y$ sont les fonctions $f(x) = \lambda \exp(B(x))$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Cette proposition généralise le résultat présenté dans la Proposition 5.1.2 correspondant au cas où a est constant.

Exemple : Considérons l'équation différentielle $y' = xy$. Ici $b(x) = x$ est définie et continue sur $I = \mathbb{R}$, et $B(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $b(x) = x$. Donc les solutions de $y' = xy$ sont les fonctions

$$f_\lambda(x) = \lambda \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\,.$$

Chaque solution est une solution paire. Les graphes des solutions sont représentés ci-dessous.



$\boxed{\textbf{Equation } (E) : y' = b(x)y + c(x)}$ $\quad (a(x) = 1, \forall x \in I)$

La méthode de résolution est générale et se fait en deux étapes.
Première étape : on cherche les solutions générales de

$$(E_1) \qquad y' = b(x)y\,.$$

D'aprés le cas précédent, elles sont de la forme $f_1(x) = \lambda \exp(B(x))$, où B est une primitive de b sur l'intervalle I considéré et $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

Deuxième étape : "variation de la constante" on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f_0(x) = h(x)\exp(B(x))$, $x \in I$. Les solutions de (E) sont alors données par

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)\,,\; x \in I\,.$$

$\boxed{\text{Solution générale de } (E) = \text{ Solution générale de } (E_1) + \text{ Solution particulière de } (E)}$.

De plus, on remarque que ceux sont des solutions maximales car elles sont définies sur I, domaine de définition de l'équation (E).

Exemple : Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{2y}{x} + 1$ sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

La fonction $b(x) = 2/x$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et sur cet intervalle, elle a pour primitive $2\ln(x)$.

a) Sur l'intervalle I, l'équation $y' = \dfrac{2y}{x}$ a donc pour solution $f_1(x) = \lambda \exp(2\ln(x)) = \lambda x^2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) On cherche ensuite une solution particulière de $y' = \dfrac{2y}{x} + 1$ sous la forme $f_0(x) = h(x)x^2$ où h est une fonction dérivable inconnue. On a alors

$$f_0'(x) = h'(x)x^2 + 2h(x)x\,,$$

et donc $h'(x)x^2 + 2h(x)x = 2h(x)x + 1$ soit $h'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, pour $x > 0$ et donc on peut prendre $h(x) = -1/x$, pour $x > 0$. La solution particulière est alors $f_0(x) = -\dfrac{x^2}{x} = -x$. La solution générale de $y' = \dfrac{2y}{x} + 1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est donc

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) = \lambda x^2 - x,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Equation (E) **:** $a(x)y' = b(x)y + c(x)$

La méthode de résolution consiste d'abord à se placer sur un intervalle $J \subset I$ sur lequel $a(x) \neq 0$. On se ramène alors au cas précédent car l'équation différentielle (E) est équivalente sur J à

$$y' = \frac{b(x)}{a(x)}y + \frac{c(x)}{a(x)}\,, \quad \forall x \in J\,.$$

Première étape : on trouve toutes les solutions sur J, par la méthode précédente.

Deuxième étape : on cherche l'intervalle maximal, en étudiant les possibilités de prolonger les solutions précédentes à un intervalle plus grand ou en tentant de recoller les différentes solutions......

Un premier exemple : résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' - y = 0\,.$$

Les fonctions $a(x) = x$, $b(x) = 1$ et $c(x) = 0$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc l'équation différentielle est définie sur $I = \mathbb{R}$.

a) *Intervalle d'étude* : $a(x) = x$ s'annulant en 0, les intervalles d'étude sont $J_1 =]-\infty, 0[$ et $J_2 =]0, +\infty[$.

b) *Intégration de l'équation sur* J_i $(i = 1, 2)$: sur chacun de ces intervalles, l'équation équivaut à

$$y' - \frac{1}{x}y = 0\,.$$

Une primitive de $\dfrac{1}{x}$ étant $\ln|x|$, la solution générale de (E) sur J_i, $(i = 1, 2)$, est, d'après la proposition 5.2.2, $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) *Intégration de l'équation sur* $J'_1 =]-\infty, 0]$ *(resp.* $J'_2 = [0, +\infty[$*)* : soit y une solution sur J'_i. La restriction de y à J_i est alors une solution de (E) sur J_i, c'est à dire :

$$\forall x \in J_i, \quad y(x) = \lambda x\,.$$

La continuité de y en 0 impose

$$y(0) = \lim_{x \to 0^+} y(x) = 0\,,$$

c'est à dire que

$$\forall x \in J'_i, \quad y(x) = \lambda x\,.$$

y est alors dérivable en 0, avec $y'(0) = \lambda$ et l'équation différentielle est vérifiée par y en 0. On en déduit que la solution générale de l'équation différentielle sur J'_i est encore $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) *Intégration de l'équation sur* $\mathbb{R}$: soit y une solution sur $\mathbb{R}$. La restriction de y à J'_i est alors une solution sur J'_i, c'est à dire, qu'il existe deux constantes (à priori différentes) λ et μ telles que

$$\begin{array}{ll} \forall x \in J'_1, & y = \lambda x \\ \forall x \in J'_2, & y = \mu x\,. \end{array}$$

La fonction ainsi définie est continue en 0. Sa dérivabilité en 0 équivaut à (dérivées à droite et à gauche égales) $\lambda = \mu$. On en déduit donc que l'ensemble des solutions maximales sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$y(x) = \lambda x\,, \qquad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle}\,.$$

Un deuxième exemple : résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad 2xy' - 3y = \sqrt{x}\,.$$

Les fonctions $a(x) = 2x$, $b(x) = -3$ et $c(x) = \sqrt{x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ donc l'équation différentielle est définie sur $I = \mathbb{R}^+$.

a) *Intervalle d'étude* : $a(x) = x$ s'annulant en 0, l' intervalle d'étude est $J =]0, +\infty[$.

b) *Intégration de l'équation sans second membre sur* J :

$$(E_1) \qquad 2xy' - 3y = 0\,.$$

Sur l'intervalle J, l'équation s'écrit

$$y' - \frac{3}{2x} y = 0\,.$$

Une primitive de $\dfrac{3}{2x}$ étant $\frac{3}{2}\ln x$, la solution générale de l'équation sans second membre sur J est

$$y_1(x) = \lambda x^{\frac{3}{2}}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

c) *Intégration de l'équation complète sur J* : on utilise la méthode de la variation de la constante qui conduit à chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = h(x)x^{3/2}$, où h est une fonction dérivable sur J. On obtient

$$2h'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}\,,$$

ou encore

$$h'(x) = \frac{1}{2x^2}\,.$$

Par conséquent, on peut choisir $h(x) = -\dfrac{1}{2x}$, d'où une solution particulière de (E) sur J est donnée par $y_0(x) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. Donc l'ensemble des solutions de (E) sur J est décrit par

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = \lambda x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,.$$

d) *Intégration de l'équation complète sur I* : soit y une solution de (E) sur I. Sa restriction à J est une solution sur J, soit

$$\forall x > 0, \quad y(x) = \lambda x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,,$$

et par suite par prolongement par continuité en 0

$$\forall x \geqslant 0, \quad y(x) = \lambda x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,.$$

Or cette dernière fonction est somme d'une fonction dérivable en 0 ($\lambda x^{\frac{3}{2}}$) et d'une fonction non dérivable en 0 ($-\frac{1}{2}\sqrt{x}$). Elle n'est donc pas dérivable en 0. Par conséquent, il n'y a pas de solutions de (E) sur I et l'intervalle maximal est J et les solutions maximales sont définies sur $J =]0, +\infty[$ et sont données par

$$\forall x \in J, \quad y(x) = \lambda x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,.$$

5.2.3 Exemples d'autres équations différentielles

Nous allons examiner deux types de telles équations, appelées à "variables séparées" et "homogènes".

Equations à variables séparées

Ceux sont les équations du type

$$f(y)y' = g(x)\,,$$

où f et g sont des fonctions continues sur des intervalles J et I. Le principe de calcul est explicité sur deux exemples ci-dessous.

Exemple 1 : on a rencontré ci-dessus l'équation $y' = a(x)y$ avec a définie et continue sur un intervalle I. En la mettant sous la forme $\dfrac{y'}{y} = a(x)$, on voit que c'est une équation à variables séparées avec $f(y) = 1/y$ et $g(x) = a(x)$. Supposons que u soit une solution définie sur I et que $u(x)$ soit non nul pour tout $x \in I$. On a alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = a(x)\,, \quad \text{pour tout } x \in I\,.$$

En notant $A(x)$ une primitive de $a(x)$ sur I, on a

$$\ln|u(x)| = A(x) + C\,, \quad \text{pour tout } x \in I\,.$$

Comme $u(x)$ ne s'annule pas sur I et est continue, $u(x)$ garde un signe constant sur I et on a

soit $u(x) = \exp(A(x) + C) = \exp(C)\exp(A(x))$, $x \in I$.

soit $u(x) = -\exp(A(x) + C) = -\exp(C)\exp(A(x))$, $x \in I$.

Ici $\exp C \neq 0$. Mais comme la fonction nulle est aussi solution, on retrouve bien les solutions $u(x) = \lambda \exp(A(x))$, λ constante réelle.

Exemple 2 : soit l'équation

$$(1 + x)y' = 1 + y^2\,.$$

Plaçons-nous sur un intervalle I sur lequel $1 + x \neq 0$ donc $-1 \notin I$ et considérons une solution y. Alors on a

$$\frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} = \frac{1}{1 + x}\,, \quad \text{pour } x \in I\,.$$

On a une équation à variables séparées avec $f(y) = \dfrac{1}{1 + y^2}$ pour $y \in \mathbb{R}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ pour $x \in I$. En intégrant, on obtient, $\arctan(y(x)) = \ln|1 + x| + C$ où C est une constante. Les solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle I sont donc les fonctions $y(x) = \tan(\ln|1 + x| + C)$.

Equations homogènes

Une équation différentielle du premier ordre est dite *homogène* si elle s'écrit sous la forme

$$y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big)\,,$$

où f est une fonction définie sur un certain intervalle.

Résolution de (E) **:** $y' = f\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$.

La méthode consiste à remplacer la fonction inconnue y par une nouvelle fonction t définie par $t(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. On a alors $y(x) = xt(x)$ et donc $y'(x) = t(x)+xt'(x)$. En reportant dans (E), on obtient

$$t(x) + xt'(x) = f(t)\,,$$

soit

$$\frac{t'(x)}{f(t(x)) - t(x)} = \frac{1}{x}\,, \quad \text{pour } x \neq 0\,.$$

On est ramené à résoudre l'équation à variables séparées

$$\frac{t'}{f(t) - t} = \frac{1}{x}\,.$$

5.3 Exercices

Exercice 5.1 *!Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $2y' - 3y = 0,$ b) $y' + 2y = 0,$ c) $y'' + y' = 0,$
d) $y'' - 4y' + 3y = 0,$ e) $y'' + y' + y = 0$ *et* f) $y'' - 6y' + 9y = 0.$

Exercice 5.2 *Trouver la solution de l'équation différentielle*

$$y'' + y' - 12y = 0$$

qui vérifie $y(2) = 2$ *et* $y'(2) = 0$.

Même question avec l'équation

$$\theta'' + 9\theta = 0$$

et les conditions $\theta(\pi/2) = 0$ *et* $\theta'(\pi/2) = 3$.

Exercice 5.3 *Intégrer les équations différentielles suivantes :*

a) $y'' + y = \cos^2 x,$ b) $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x,$
c) $y'' + y' - 2y = \cos x + \operatorname{ch} x,$ d) $y'' - 2y' + y = e^x(x^2+1),$
e) $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin 3x$ *et* f) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}(x^2+1).$

Exercice 5.4 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $y'' + y' - 6y = \sin(2x) + e^{2x}$ *(janvier 96)*,
b) $y'' + 3y' + 2y = 2x\operatorname{ch}(x)$ *(janvier 95) et*
c) $y'' - 3y' + 2y = 2000$ *(janvier 98)*.

Exercice 5.5 *Résoudre les équations différentielles suivantes (choisir pour chacune d'elles un intervalle adapté au calcul) :*

a) $x^3y' + x^2y = x$ *(juin 98)*, b) $e^xy' - e^xy = 2x$ *(juin 97)*,
c) $xy' + 2y = \dfrac{1}{1+x^2}$ *(sept 96)*, d) $xy' + 2y = x^2 - 3,$
e) $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1,$ f) $y' + y\tan(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ *et*
g) $xy' - xy = e^x.$

Exercice 5.6 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $xy' - y = 0,$ b) $xy' - 2y = 0,$
c) $x^2y' - y = 0,$ d)$y'\sin x - 2y\cos x = 0\,.$

Exercice 5.7 *On considère l'équation différentielle*

$$y'' + 2my' + y = 0 \tag{5.1}$$

où m est un paramètre réel.

a) *Donner, en distinguant suivant les valeurs de m, la solution générale de (5.1).*

b) *Résoudre $y'' + 2y' + y = 3x^5 + 3$.*

Exercice 5.8 *Résoudre les équations suivantes :*

$$\text{a)} \quad (1+x^2)y' + 3xy = 0, \qquad \text{b)} \quad y' \sin(x) = y.$$

Exercice 5.9 *On se propose de montrer que si $a : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors les solutions de :*

$$y' = a(x)y$$

définies sur I sont exactement les fonctions

$$f(x) = \lambda \exp(A(x))$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante et A est une primitive de a sur I.

a) *On pose $f(x) = \lambda \exp(A(x))$. Montrer que f est une solution de $y' = a(x)y$ définie sur I.*

b) *Soit $u(x)$ une solution définie pour tout $x \in I$. Montrer que la fonction*

$$v(x) = u(x) \exp(-A(x))$$

est dérivable avec $v'(x) = 0$, pour tout $x \in I$. En déduire que $u(x) = \lambda \exp(A(x))$.

Exercice 5.10 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$\text{a)} \quad y' = y + 1, \qquad \text{b)} \quad xy' - 2y = x^3 \quad \textit{et} \quad \text{c)} \quad x^2 y' = y.$$

Exercice 5.11 *Intégrer les équations différentielles suivantes :*

$$\text{a)} \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \qquad \text{b)} \quad y' - \frac{y}{2x} = \frac{x+1}{x}, \qquad \text{c)} \quad (\cos x)y' + (\sin x)y = 1,$$

$$\text{d)} \quad y' + (\cos x)y = \frac{\sin 2x}{2}, \qquad \text{e)} \quad y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x \quad \textit{et} \quad \text{f)} \quad y' + y = \frac{1}{e^x}.$$

Exercice 5.12 $^{(*)}$ *On considère l'équation suivante*

$$y = y'x - \frac{y'^4}{4}. \tag{5.2}$$

Cette équation n'est pas de l'un des types classiques. L'exercice propose une méthode de résolution.

a) Déterminer toutes les solutions $f(x)$ telles que $f'(x)$ soit constante. Si $f'(x) = \lambda$ pour tout x, on note D_λ le graphe de f. Vérifier que D_λ est une droite.

b) Montrer qu'il existe un polynôme $u(x) = ax^2 + bx + c$ qui est solution de (5.2). On note Γ le graphe de u qui est une parabole.

c) Montrer que les droites tangentes à Γ sont exactement les droites D_λ trouvées en a).

Exercice 5.13 *On considère l'équation différentielle :*

$$y' - 2xy + 2xy^2 = 0. \tag{5.3}$$

On cherche les solutions de y de (5.3) qui ne s'annulent pas sous la forme :

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}.$$

Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction u ? En déduire la forme des solutions de (5.3) qui ne s'annulent pas.

Exercice 5.14 *L'équation différentielle :*

$$xy' + y^2 = 0$$

est-elle linéaire ? Quelles sont ses solutions ?
Mêmes questions pour l'équation différentielle :

$$y' = (1 - y)(2 - y).$$

Exercice 5.15 *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

a) $(x^2 - x)y' = y^2 + y$, b) $y' = \exp(x + y)$, c) $y' = y^2$,
d) $y' = \sqrt[n]{y}$, e) $y' = e^x y^2$ *et* f) $y' = x(y^2 - 1)$.

Exercice 5.16 *Résoudre l'équation différentielle :*

$$xy'' + (1 - y^2)y' = 0.$$

Exercice 5.17 *Montrer que l'équation différentielle :*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

possède pour solution particulière un polynôme. En déduire les solutions de cette équation différentielle.

Exercice 5.18 *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :*

$$y'' + 2y' - 5y = xe^{-x} \cos 2x.$$

En déduire les solutions de cette équation différentielle.

Exercice 5.19 *Intégrer l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln |x|.$$

5.4 Test de 1h (SMUE11, Automne 2000)

Exercice 1 *Soit* (E) *l'équation différentielle définie par*

$$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + x + \exp(x)\cos(2x)\,.$$

1. *Déterminer la forme générale des solutions de* (E).
2. *Donner la solution particulière* g *de l'équation* (E) *qui vérifie les deux conditions* $g(0) = 1$ *et* $g'(0) = 2$.

Exercice 2

1. *Calculer sur l'intervalle* $I =]-1, 1[$ *une primitive de la fonction* f *définie sur* I *par*

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

(on pourra effectuer le changement de variable $u = \sqrt{1 - x^2}$*).*

2. *Résoudre sur l'intervalle* I *l'équation différentielle*

$$(1 - x^2)y' = xy + x^3\,.$$

Chapitre 6

Corrections de tests donnés en SMUE11

Une correction du test de 30 mn sur les nombres complexes (SMUE11, Automne 2000)

Exercice 1 *On cherche $x \in \mathbb{C}$ tel que $x^2+2x+2=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$. Les solutions sont*

$$x_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i \text{ et } x_2 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i.$$

Exercice 2 *On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^3 = 1+i$. Comme $|1+i| = \sqrt{2}$, on écrit $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On résout donc l'équation $z^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, laquelle est équivalente à :*

$$|z|^3 = \sqrt{2} \text{ et } 3\arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

On obtient :

$$|z| = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 2^{1/6} \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\}.$$

Les racines cubiques de $1+i$ sont donc :

$$2^{1/6}e^{i\frac{\pi}{12}}, 2^{1/6}e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2^{1/6}e^{i\frac{17\pi}{12}} = 2^{1/6}e^{i\frac{-7\pi}{12}}.$$

Exercice 3 *Soit M un point du plan d'affixe z tel que $|iz-5| < 4$. On remarque que*

$$|iz-5| = \left|i\Big(z - \frac{5}{i}\Big)\right| = |i||z+5i| = |z-(-5i)|.$$

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|iz-5| < 4$ est donc le disque unité ***ouvert*** *(c'est à dire sans le bord) centré au point du plan d'affixe $-5i$ et de rayon 4.*

Une correction du test de 30 mn sur les fonctions circulaires (SMUE11, Automne 2000)

Exercice 1 1. $\arccos(\frac{-1}{2}) = \theta_1$ *où* θ_1 *vérifie*

$$\theta_1 \in [0, \pi] \text{ et } \cos\theta_1 = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$.

2. $\arcsin(\cos(\frac{2\pi}{3})) = \theta_2$ *où* θ_2 *vérifie*

$$\theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \sin\theta_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}).$$

Comme $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{6})$, θ_2 *vérifie*

$$\theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } \sin\theta_2 = \sin(-\frac{\pi}{6}).$$

Ainsi $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$.

3. $\arctan(\tan(\frac{19\pi}{4})) = \theta_3$ *où* θ_3 *vérifie*

$$\theta_3 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \tan\theta_3 = \tan\frac{19\pi}{4}.$$

Autrement dit on obtient :

$$\theta_3 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \theta_3 = \frac{19\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi $\theta_3 = -\frac{\pi}{4}$ *(prendre* $k = 5$*).*

Exercice 2 1. *Soit* $f : x \longmapsto \tan(x^2)$. *Comme* $x \longmapsto x^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et comme* $x \longmapsto \tan x$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, f *est dérivable sur* $\mathbb{R}\backslash(\{\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{N}\} \cup \{-\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbb{N}\})$. *En effet,* $x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *n'a de sens que si* $k \geq 0$ *et les solutions sont* $\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ *ou* $-\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$.

$$f'(x) = 2x(1 + \tan^2(x^2)) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}.$$

2. *Soit* $g : x \longmapsto \arccos(2x^2 - 1)$. *La fonction* $x \longmapsto 2x^2 - 1$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *mais* $x \longmapsto \arccos x$ *n'est dérivable que sur* $]-1, 1[$. *Comme*

$$-1 < 2x^2 - 1 < 1 \Longleftrightarrow 0 < x^2 < 1 \Longleftrightarrow x \in]-1, 0[\cup]0, 1[,$$

g est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$.

$$g'(x) = 4x\frac{-1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \frac{-4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2-x^4}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi,

$$g'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \textit{ si } x \in]0,1[\textit{ et } g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \textit{ si } x \in]-1,0[.$$

3. *Soit* $h : x \longmapsto \arcsin(\cos 3x)$. *La fonction* $x \longmapsto \cos 3x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *mais* $x \longmapsto \arcsin x$ *n'est dérivable que sur* $]-1,1[$. *Comme*

$$\cos 3x \in]-1,1[\Longleftrightarrow 3x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z},$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$h'(x) = -3\sin(3x)\frac{1}{\sqrt{1-(\cos(3x))^2}} = \frac{-3\sin(3x)}{\sqrt{(\sin(3x))^2}} = -3\frac{\sin(3x)}{|\sin(3x)|}.$$

Ainsi,

$h'(x) = -3$ *si* $3x \in]2k\pi, \pi+2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$ *et* $h'(x) = 3$ *si* $3x \in]\pi+2k\pi, (2k+2)\pi[, k \in \mathbb{Z}$.

Une correction du test de 30 mn sur les fonctions hyperboliques (SMUE11, Automne 2000)

Exercice 1 *Etudions la fonction tangente hyperbolique* th *(Tableau de variation et graphe). Par définition,* th *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *Elle est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$.

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}.$$

Ainsi $\operatorname{th}'(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *la fonction* th *est donc strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *D'autre part,* $\operatorname{th}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\operatorname{th}(x)$. *La fonction* th *est donc impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine. Il suffit d'étudier* th *sur l'intervalle* $[0, +\infty[$.

Tableau de variation de la fonction th :

x	0		$+\infty$
$\operatorname{th}'(x)$	1	$+$	0
$\operatorname{th}(x)$	0	$\nearrow$	1

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

(en effet, $\lim_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$*). Allure du graphe de la fonction* th, *voir page 36.*

Exercice 2 *Sachant que* $\operatorname{ch}(-\ln 4) = \frac{17}{8}$ *et* $\operatorname{sh}(-\ln 4) = -\frac{15}{8}$, *à l'aide de la formule donnant* $\operatorname{sh}(a+b)$ *en fonction de* $\operatorname{sh}(a), \operatorname{sh}(b), \operatorname{ch}(a)$ *et* $\operatorname{ch}(b)$, *on souhaite résoudre l'equation suivante :*

$$17\operatorname{sh}(2x) - 15\operatorname{ch}(2x) = 8\operatorname{sh}(9x-1).$$

On veut résoudre l'équation

$$\frac{17}{8}\operatorname{sh}(2x) - \frac{15}{8}\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{sh}(9x-1) \Longleftrightarrow \operatorname{ch}(-\ln 4)\operatorname{sh}(2x) + \operatorname{sh}(-\ln 4)\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{sh}(9x-1).$$

Sachant que $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) + \operatorname{ch}(b)\operatorname{sh}(a)$, *on est amené à résoudre :*

$$\operatorname{sh}(2x - \ln 4) = \operatorname{sh}(9x-1).$$

La fonction sh *étant strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, elle est bijective sur* $\mathbb{R}$*. Par conséquent*

$$\mathrm{sh}(2x - \ln 4) = \mathrm{sh}(9x - 1) \Longleftrightarrow 2x - \ln 4 = 9x - 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1 - \ln 4}{7}.$$

L'unique solution de l'équation $17\,\mathrm{sh}(2x) - 15\,\mathrm{ch}(2x) = 8\,\mathrm{sh}(9x - 1)$ *est* $\dfrac{1 - \ln 4}{7}$.

Exercice 3 *On veut résoudre l'equation :*

$$\mathrm{ch}(x) = 4\,\mathrm{sh}(x),$$

qui n'est autre que

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 4\frac{e^x - e^{-x}}{2} \Longleftrightarrow e^x + e^{-x} = 4e^x - 4e^{-x} \Longleftrightarrow 5e^{-x} - 3e^x = 0.$$

Posons $X = e^x$ $(X > 0)$*. On est ramené à la résolution de l'équation :*

$$\frac{5}{X} - 3X = 0, X > 0 \Longleftrightarrow 5 - 3X^2 = 0, X > 0 \Longleftrightarrow X = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

On résout ensuite $e^x = \sqrt{\frac{5}{3}}$*. ce qui nous donne* $x = \ln\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 3)$*. L'unique solution de l'équation* $\mathrm{ch}(x) = 4\,\mathrm{sh}(x)$ *est donc* $\dfrac{1}{2}(\ln 5 - \ln 3)$.

Une correction du test de 1h sur les primitives et les équations différentielles (SMUE11, Automne 2000)

Exercice 1 *1. L'équation différentielle sans second membre associée est*

$$(E_0)\ \ y'' - 2y' + 5y = 0.$$

L'équation caractéristique associée à (E_0) *est :*

$$X^2 - 2X + 5 = 0,$$

dont le discriminant Δ *vaut* $-16 = (4i)^2$. *Les racines de* $X^2 - 2X + 5$ *sont donc* $X_1 = 1 - 2i$ *et* $X_2 = 1 + 2i$. *La forme générale des solutions de* (E_0) *est donc :*

$$y(x) = (\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))e^x \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons à présent une solution particulière y_1 *de*

$$(E_1)\ \ y'' - 2y' + 5y = P(x) \text{ où } P(x) = 5x^2 + x.$$

On cherche y_1 *sous la forme d'un polynôme* Q *de degré 2 (car 2 est le degré de* P*). Posons* $Q(x) = ax^2 + bx + c$. *On a donc* $Q'(x) = 2ax + b$ *et* $Q''(x) = 2a$. *En remplaçant* y *par* Q *dans l'équation* (E_1) *on obtient :*

$$5ax^2 + (5b - 4a)x + (2a - 2b + 5c) = 5x^2 + x.$$

Deux polynômes étant égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 5a & = & 5 \\ 5b - 4a & = & 1 \\ 2a - 2b + 5c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & 0 \end{array}\right.$$

Une solution particulière de (E_1) *est donc* $y_1(x) = x^2 + x$.
Cherchons à présent une solution particulière de

$$(E_2)\ \ y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(2x).$$

Comme $1 + 2i$ *est solution de l'équation caractéristique associée à* (E_0), *on cherche* y_2 *sous la forme* $y_2(x) = xe^x(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x))$ *avec* α, β *réels. On a donc :*

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= (e^x + xe^x)(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)) + xe^x(-2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x)) \\ &= e^x(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x) + x((2\beta + \alpha) \cos(2x) + (\beta - 2\alpha) \sin(2x))), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y''_2(x) &= e^x(\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)+x((2\beta+\alpha)\cos(2x)+(\beta-2\alpha)\sin(2x)))+\\
&\quad e^x(-2\alpha\sin(2x)+2\beta\cos(2x)+(2\beta+\alpha)\cos(2x)+(\beta-2\alpha)\sin(2x))+\\
&\quad xe^x((-4\beta-2\alpha)\sin(2x)+(2\beta-4\alpha)\cos(2x))\\
&= e^x((2\alpha+4\beta)\cos(2x)+(2\beta-4\alpha)\sin(2x))\\
&\quad +xe^x((4\beta-3\alpha)\cos(2x)+(-3\beta-4\alpha)\sin(2x)).
\end{aligned}$$

En remplaçant y par y_2 dans (E_2) on obtient :

$$e^x(4\beta\cos(2x)-4\alpha\sin(2x)) = e^x\cos(2x) \Longleftrightarrow 4\beta\cos(2x)-4\alpha\sin(2x)=\cos(2x).$$

Prenons $\beta=\frac{1}{4}$ et $\alpha=0$. Ainsi $y_2(x)=\frac{1}{4}xe^x\sin(2x)$ est une solution particulière de (E_2). La forme générale des solutions de l'équation différentielle

$$(E)\;\; y''-2y'+5y=5x^2+x+e^x\cos(2x)$$

est donc :

$$y(x)=(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x))e^x+x^2+x+\frac{1}{4}xe^x\sin(2x)\;\; \text{où } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

2. On cherche la solution g de l'équation (E) qui vérifie les deux conditions

$$g(0)=1 \quad ; \quad g'(0)=2.$$

La fonction g est de la forme $g(x)=(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x))e^x+x^2+x+\frac{1}{4}xe^x\sin(2x)$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Comme $g(0)=0$, on obtient $\mu=1$. De plus, comme

$$\begin{aligned}
g'(x) &= e^x((\lambda+2\mu)\cos(2x)+(\mu-2\lambda)\sin(2x))+2x+1+\\
&\quad \frac{1}{4}e^x(x\sin(2x)+\sin(2x)+2x\cos(2x)),
\end{aligned}$$

sachant que $g'(0)=2$, on obtient $\lambda+2\mu+1=2$. Finalement $\lambda=1,\mu=0$ et

$$g(x)=\cos(2x)e^x+x^2+x+\frac{1}{4}xe^x\sin(2x).$$

Exercice 2 *1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=]-1,1[$ par*

$$f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \forall\, x\in I.$$

Calculons la primitive de f sur l'intervalle I en effectuant un changement de variable. Posons $u=\sqrt{1-x^2}$ ($u^2=1-x^2$). On a donc $du=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Ainsi

$$I=\int\frac{(-x^2)(-x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(u^2-1)du=\frac{1}{3}u^3-u+K \;\; \text{où } K\in\mathbb{R}.$$

Finalement une primitive de f sur I est de la forme

$$F(x) = \frac{1}{3}\Big(\sqrt{1-x^2}\Big)^3 - \sqrt{1-x^2} + c \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

2. Résolvons l'équation différentielle

$$(E) \quad (1-x^2)y' = xy + x^3$$

sur l'intervalle I. Comme $x \in]-1,1[$, (E) est équivalent à $y' = \dfrac{x}{1-x^2}y + \dfrac{x^3}{1-x^2}$. Résolvons tout d'abord

$$(E_0) \quad y' = \frac{x}{1-x^2}y = a(x)y \text{ où } a(x) = \frac{x}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{1-x^2}.$$

***Une** primitive de $a(x)$ est $A(x) = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ car $x \in]-1,1[$. La forme générale des solutions de (E_0) est donc :*

$$y(x) = \lambda e^{A(x)} = \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y_1(x) = \dfrac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ où h est une fonction continue et dérivable sur $]-1,1[$. On a alors :

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \frac{h'(x)}{\sqrt{1-x^2}} + h(x)(-\frac{1}{2})\frac{-2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{h'(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

En remplaçant y par y_1 dans (E), on obtient :

$$\frac{h'(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}\frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^3}{1-x^2},$$

et donc $h'(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$. D'après la question 1., toute primitive de h' est de la forme

$$\frac{1}{3}\Big(\sqrt{1-x^2}\Big)^3 - \sqrt{1-x^2} + c \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

*Comme l'on cherche **une** solution particulière de (E) il suffit de prendre **une** primitive particulière de h. Si l'on choisit $c = 0$, on obtient comme solution particulière y_1 de (E) :*

$$y_1(x) = \left(\frac{1}{3}\Big(\sqrt{1-x^2}\Big)^3 - \sqrt{1-x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}(1-x^2) - 1 = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}.$$

La forme générale des solutions de (E) est :

$$y(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 7

Quelques sujets de contrôles continus et d'examens

7.1 Contrôle continu, octobre 2000

Durée : 1h30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les documents de toute nature ainsi que les calculettes ne sont pas autorisés. En ce qui concerne la notation, il sera tenu compte autant de la qualité de la rédaction que des résultats obtenus.

Exercice 1 *Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que z, $\frac{3+4i}{z}$ et $z-1$ aient le même module.*

Exercice 2 *(i) Rappeler les solutions de l'équation*

$$Z^5 = 1\,.$$

(ii) En déduire l'ensemble des réels x vérifiant

$$\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^5 = 1\,.$$

Exercice 3 *Soit $f\ :]-1,1[\to\mathbb{R}$ la fonction définie pour $x\in]-1,1[$ par*

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\,.$$

(i) Calculer la dérivée de f.

(ii) En déduire, pour $x\in]-1,1[$, une autre expression de $f(x)$.

Exercice 4 *Résoudre l'équation suivante :*

$$\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin x\,.$$

7.2 Contrôle continu, décembre 2000

Durée : 1h30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les documents de toute nature ainsi que les calculettes ne sont pas autorisés. En ce qui concerne la notation, il sera tenu compte autant de la qualité de la rédaction que des résultats obtenus.

Exercice 1 *Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$, on pose* $y(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

1. *Montrer que, pour $x \geqslant 0$, $y(x) \in [0, \frac{\pi}{2}[$.*
2. *Montrer que $1 + \tan^2 y(x) = \operatorname{ch}^2(x)$.*
3. *En déduire que*
$$\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right) = \arctan(\operatorname{sh} x)\,.$$
4. *Par un calcul de dérivée convenable, retrouvez la formule précédente.*

Exercice 2 *On considère l'application $f\colon]-\infty, -2[\to \mathbb{R}$ définie par* $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+2)^2(x^2+4)}$. *Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]-\infty, -2[$.*

Exercice 3 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' + 3y' + 9y = x^2 + 1\,.$$

7.3 Sujet d'examen, session de janvier 2000

Durée : 1h30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les documents de toute nature ainsi que les calculettes ne sont pas autorisés. En ce qui concerne la notation, il sera tenu compte autant de la qualité de la rédaction que des résultats obtenus.

Exercice 1 *Déterminer l'ensemble A des réels x vérifiant*

$$\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^5 = 1\,.$$

Exercice 2 *On considère l'application $f\ :]-\infty,-2[\to\mathbb{R}$ dfinie par*

$$f(x) := \frac{x^2}{(x+2)^2(x^2+4)}\,.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]-\infty,-2[$.

Exercice 3 *Soit $g\ :]0,2[\to\mathbb{R}$ l'application définie par $g(x)=\arcsin(x-1)$.*

1. *Montrer que g est dérivable sur $]0,2[$ et calculer g'.*
2. *Soit l'équation différentielle*

   $$(E) \qquad x(2-x)y' + (1-x)y = 1\,,$$

   où la fonction inconnue y est une fonction dérivable de la variable réelle x. Résoudre (E) sur l'intervalle $]0,2[$.

Exercice 4 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + y = \exp(x) + \exp(-x)\,,$$

où la fonction inconnue y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x.

7.4 Sujet d'examen, session de juin 2000

Durée : 1h30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les documents de toute nature ainsi que les calculettes ne sont pas autorisés. En ce qui concerne la notation, il sera tenu compte autant de la qualité de la rédaction que des résultats obtenus.

Exercice 1 *Soit* $g\ :]-2,2[\to\mathbb{R}$ *l'application définie par*

$$g(x)=\arcsin(\frac{x}{2})\,.$$

a) *Montrer que* g *est dérivable sur* $]-2,2[$ *et calculer* g'.

b) *Soit l'équation différentielle*

$$\text{(E)}\quad (4-x^2)y'-xy=4\,,$$

où la fonction inconnue y *est une fonction réelle dérivable de la variable réelle* x. *Résoudre* (E) *sur l'intervalle* $]-2,2[$.

Exercice 2 *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*

$$y''-3y'+2y=(1-2x)\exp(x)\,,$$

où la fonction inconnue y *est une fonction réelle, deux fois dérivables de la variable réelle* x.

Exercice 3 *On considère l'application* $f\ :]2,+\infty[\to\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2-3x+4}{(x-2)^2(x^2+x+1)}\,.$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f *sur* $]2,+\infty[$.

7.5 Sujet d'examen, session de janvier 2001

Durée : 1h30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les documents de toute nature ainsi que les calculettes ne sont pas autorisés. En ce qui concerne la notation, il sera tenu compte autant de la qualité de la rédaction que des résultats obtenus.

Exercice 1 *Soit z un nombre complexe. Prouver les identités suivantes :*

$$\sum_{k=0}^{18}\left(z-\exp(\frac{2ik\pi}{19})\right)^2 = 19z^2$$

$$\sum_{k=0}^{18}\left|z-\exp(\frac{2ik\pi}{19})\right|^2 = 19(1+|z|^2)\,.$$

Exercice 2 *Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par la formule :*

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)\,.$$

a) *Préciser le domaine de définition de f.*

b) *Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty,1[$ en calculant sa dérivée sur cet intervalle.*

c) *Déduire de la question précédente une expression plus simple de $f(x)$, valable pour tout x de $]-\infty,1[$; tracer le graphe de la restriction de f à $]-\infty,1[$.*

Exercice 3 a) *En utilisant le changement de variables $x = \operatorname{sh} u$, calculer sur $\mathbb{R}$:*

$$\int \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,.$$

b) *Résoudre l'équation différentielle suivante, d'inconnue y, fonction dérivable à valeurs réelles de la variable réelle x :*

$$(1+x^2)y' + xy = 2x^2+1\,.$$

Exercice 4 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + y' - 6y = x\exp(2x)\,,$$

où la fonction inconnue y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x.